"Gregorianum"

COMMENTARII

DE RE THEOLOGICA ET PHILOSOPHICA

EDITI A PROFESSORIBUS
PONTIFICIAE UNIVERSITATIS GREGORIANAE

Anno XX - 1939
Vol. XX

ROMAE
IN PONTIFICIA UNIVERSITATE GREGORIANA
PIAZZA DELLA PILOTTA

ACCEPTA OPERA

Nota. - Librorum acceptorum publicatione doctrinam illorum approbare aut scientificum valorem exprimere nullatenus volumus; quos vero lectorum interesse existimabimus, opportunae recensioni subiciemus. Illi autem qui sponte in redactionem missi sunt in nullo casu remittentur.

BREHIER-AIGRAIN. — *Histoire de l'Eglise publiée sous la direction de Augustin Fliche et Victor Martin. Grégoire le Grand, les Etats barbares et la conquête arabe* (590-757). — Paris, Bloud et Gay, 1938, 25 × 16 cm., 576 pag., 75 Frs. f.

MUERATTI DANTES M., S. S. — *Promptuarium pro Ordinandis et Confessariis examinandis. Editio quinta.* — Roma, Tip. Schola Salesiana, 1938, 18'3 × 10'5 cm., 174 pag., Lire 6.

MUSGER JOSEPHUS. — *Dicta Christi de Paracleto. Dissertatio ad Lauream Pont. Univ. Greg. Roma.* — Roma, Tipog. Pont. Università Gregoriana, 1938, 24 × 16 cm., 160 pag.

PRADEL HENRI. — *Les Lectures des Jeunes. Prèface de M. Henri Tuchy.* — Paris, Téqui Editions, 1938, 18 × 11'5 cm., VII-220 pag., Frs. f. 12.

BÉZUILLER LUCIEN, Rédemptoriste. — *Alfred Soussia (Instituteur) 1863-1933. Prèface de S. Exc. Mgr. Rémi Leprêtre, Délégué apostolique en Syrie.* — Paris, Librairie Téqui, 1938, 18 × 11,5 cm., 177 pag., Frs. f. 10.

SINEUX RAPHAËL, O. P. — *La Vierge dans notre vie.* — Paris, Editions Spes, 1938, 18 × 11,3 cm., 238 pag., Frs. f. 15.

NAZ RAOUL. — *La procédure des actions en nullité de mariage. Préface de S. Exc. Mgr. Durieux.* — Paris, Librairie Letouzecy et Ané, 1938, 22 × 14,2 cm., 254 pag.

SEITERICH EUGEN. — *Wege der Glaubensbegründung. Theologische Studien. XLIX. Heft.* — Freiburg i. B., Verlag Herder, 1938, 23 × 14,5 cm., XV-166 pag., RM. 4,50.

SOFIA DE VITO MARIA. — *L'origine del Dramma liturgico. Biblioteca della «Rassegna». XXI.* — Genova, S. A. Editrice Dante Alighieri, 1938, 24 × 17,3 cm., 178 pag., Lire 20.

FORD JOHN C., S. J. — *The Validity of Virginal Marriage. Dissert. Theol. Facult. Pont. Greg. Univ. Roma.* — Worcester Mass., Harrigon Press, 1938, 25,5 × 18,2 cm., IX-139 pag., $ 1,50.

ARNALDUS PARENTI S. I., curator sponsor.

Imprimatur: Romae, 3 Iul. 1939. AL. TRAGLIA, Archiep. Caesar. Vicesg.

Romae, 1939 - Typis Pontif. Univ. Greg. - Piazza della Pilotta, 4.

De problemate exactitudinis geometricae

PARS I

Duo articuli qui in praecedentibus fasciculis huius periodici editi sunt [1], agebant de « philosophia scholastica cognitionis geometricae » et « de problemate necessitatis geometricae ». Prior articulus, qui hic sub nomine « introductionis » citabitur, problemata huius partis theoriae cognitionis in genere exponebat atque necessitatem inquisitionis instituendae urgebat. Alter articulus unum ex his problematibus, problema scilicet necessitatis quae cognitioni geometricae tribuitur, tum quoad facta tum quoad eorum justificationem solvere conabatur.

Iam agendum erit de altero problemate, quod solvendum inveniebamus, de problemate scilicet exactitudinis, per quod geometria ab initiis arithmeticae, in qua exactitudo non constituit enigma, differt. Non omnia quae in hoc problemate involvuntur, idem medium solutionis postulant, ut ex ipsa nostra expositione patebit. Quaedam enim sunt, quorum solutio exigit considerationem extensi tanquam « principii individuationis » quaedam ab hoc medio non dependent. De his ultimis in hoc articulo sermo erit; alias quaestiones, illas quae a consideratione principii individuationis dependent, postea, Deo favente, exponemus.

§ 1. De positione problematis

1. *In quonam consistat problema.*

Recolamus ex introductione, problema exactitudinis in hoc consistere: Ea quae geometria contendit de suis objectis: punctis, lineis, superficiebus, de eorum relationibus mutuis, de formis figurarum v. g. de rectitudine lineae, de aequalitate vel pro-

[1] *Gregorianum* XIX (1938) pag. 498-514 et XX (1939) pag. 19-54.

portionibus figurarum: ea omnia considerantur tanquam absolute exacta. Data autem sensitiva, a quibus geometria classica suam originem deducit, non habent hanc exactitudinem. Nec sensus nec imaginatio possunt percipere puncta et lineas, sed tantum corpora extensa secundum tres (saltem secundum duas) dimensiones. Non possunt distinguere lineas, tenuiter incurvatas, a rectis; consequenter nunquam possunt decidere, lineam datam esse rectam. Aequalitatem inter duas lineas vel superficies fere poterunt percipere, sed *non exacte;* idem dicendum de proportionibus. Ea quae valde distant percipi non possunt, et tamen geometria agit de extensis quae in infinitum extenduntur.

Si igitur geometria in origine sua dependet a datis sensitivis, quomodo potest hic transitus ad exactitudinem perfectam explicari; vel estne forte illusio tantum?

Animadverte bene: in problemate necessitatis, praesertim si non unice, agebatur de *nexibus* inter notiones, qui judiciis affirmantur; hic de utroque quaestio agitur, non de *nexibus* tantum, sed non minus de existentia ipsarum *notionum*.

2. *Quaedam historica.* Ad hoc problema philosophi non solent valde attendere et multi forte omnino non attenderunt; sed eo magis mathematici moderniores id fecerunt.

A. *Philosophi.* Aristoteles problema optime novit, sed perpauca de eo dicit. In *Analyt. Post.* I 31 id tangit ubi ait: « etiamsi possibile esset sentire triangulum habere angulos duobus rectis aequales, quaereremus utique demonstrationem et non, ut quidam contendunt, scientiam haberemus »[2].

Principale, ad quod nunc attendendum, non est consequens huius conditionalis, scil. quod ad *scientiam* (propter necessitatem et universalitatem huius propositionis de triangulo) requireretur demonstratio; sed potius ad hoc attendamus: Aristoteles optime indicat diversitatem quae est inter data sensitiva, quae

[2] 87 b 35: καὶ εἰ ἦν αἰσθάνεσθαι τὸ τρίγωνον ὅτι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ἔχει τὰς γωνίας, ἐζητοῦμεν ἂν ἀπόδειξιν καὶ οὐχ ὥσπερ φασί τινες ἠπιστάμεθα. Cfr. *Met.* III 2, 997 b 35 (S. U. lez. 416) Ubi Protagorae objectio profertur, quae ex eo movetur, quod in lineis sensibilibus recta non tangit circulum in uno puncto.

nunquam exacte indicant summam angulorum, et veritatem geometricam, intellectui manifestam. Et S. Thomas in suo commentario (lect. 42 n. 7) etiam hoc optime exponit ubi addit: hoc esse « exemplum de his quae sensu percipi non possunt ». Perfecta enim aequalitas inter summam angulorum trianguli et duas rectas nullo sensu percipi, nulla methodo experimentali attingi potest.

Inde haec propositio de summa angulorum trianguli nunquam poterit esse principium *primum* intuitivum; in hoc casu transitus *directus a* datis sensitivis ad affirmationem exactam intellectus, nunquam poterit justificari (non tantum quia nexum necessarium pro omnibus triangulis hic non directe intuemur sed etiam) quia exactitudo judicii hic non justificaretur. Si transitus ad exactitudinem est possibilis, ex aliis datis inveniendus erit; et problema est: num dantur talia.

In antiquitate Proclus saepius urget inexactitudinem datorum sensitivorum; immo pro eo est ratio, ut in hac materia theoriam abstractionis Aristotelis rejiciat et potius positioni Platonis adhaereat. Putat enim, primo quidem in theoria Aristotelis non posse reddi rationem certitudinis apodicticae geometricae (*In Euclid. Elem.* ed Friedlein 12, 14; 49, 17 sqq. 140, 4) in quo errat, ut vidimus in capite primo; sed praesertim putat problema exactitudinis ita non posse solvi (ibid. 12, 14-22; 49, 12-17; 139, 26-140,7 etc.); unde quamquam theoriam materiae intelligibilis admittit, eam modo Platonico explicat[3].

Apud philosophos moderniores problema exactitudinis parum examinatur. De theoriis Berkeley et Hume, qui tandem aliquando cognitionem intellectualem non bene distinguebant a sensitiva, cfr. quaedam in *Cosmologia* nostra pag. 36. Kant, ut in introductione (pag. 505) iam dictum est, non videtur distinguere problema nostrum.

Pro Stuart Mill, qui theorias Berkeley et Hume persequitur, problema non existit, quia exactitudo illa, quam geometria se attingere contendit, non existit; nec in rerum natura, nec in

[3] Cfr. Cl. *Baeumker Das Problem der Materie in der Griechischen Philosophie* pag. 422 sqq.

mente; vel forte dicendum est: Mill quia problema transitus ab inexactitudine ad exactitudinem tanquam insolubile habet, ideo negat exactitudinem existere tum in rerum natura tum in mente. Ait:

« Non existunt puncta sine magnitudine; non lineae sine latitudine nec perfecte rectae, non circuli quorum radii sunt exacte aequales; non quadrata, quorum omnes anguli sunt perfecte recti ».

Immo nec possibiles sunt illae figurae:

« Secundum quodvis criterium possibilitatis, quod habemus, nec possibiles sunt. Non possibiles sunt in rerum natura propter « constitutionem planetae nostrae saltem, si non totius universi ». Nec in mente, quia ibi non sunt nisi imagines eorum quae per experientiam novimus:

« Puncta, lineae, circuli, et quadrata, quae quis in mente habet, sunt (ita id concipio) simplices imagines punctorum, linearum, circulorum, et quadratorum, quae in experientia sua novit. Ideam nostram puncti concipio esse simpliciter ideam nostram *minimi visibilis*, minimam partem superficiei quam videre possumus. Linea, ut definitur a geometris, omnino non potest concipi »[4].

Et eius conclusio est:

« Exactitudo peculiaris, quae supponitur esse characteristica primorum principiorum geometriae, ita apparet esse fictitia »[5].

Pro Stuart Mill problema exactitudinis non existit, quia exactitudo ipsa non datur, nec in rerum natura reali, nec in na-

[4] J. Stuart Mill *System of Logic* I ed. 5 (1862) pag. 255:
« There exist no points without magnitude; no lines without breath, nor perfectly straight; no circles with all their radii exactly equal, nor squares with all their angles perfectly right... according to any test we have of possibility, they are not even possible. Their existence, so far as we can form any judgment, would seem to be inconsistent with the physical constitution of our planet at least, if not of the universe... the points, lines, circles, and squares, which any one has in his mind, are (I apprehend) simply copies of the points, lines, circles, and squares, which he has known in his experience. Our idea of a point, I apprehend to be simply our idea of the *minimum visibile*, the smallest portion of surface which we can see. A line, as defined by geometers, is wholly inconceivable ».

[5] Ibid. pag. 257: « The peculiar accuracy, supposed to be characteristic of the first principles of geometry, thus appears to be fictitious ».

tura possibili, nec in mente humana. Hanc positionem falsam esse iam inde ab initio patet; nam mens humana per plus quam viginti saecula conceptus suos exactos figurarum perfecte distinxit ab imaginibus, de illis figuris exactis intelligibiliter ratiocinata est. Sed diversa puncta postea tangemus, inter quae unum maioris momenti: Mill diversas species exactitudinis confundit.

B. *Mathematici*. In critica mathematica moderna, mathematici non solent multum immorari in problemate necessitatis; sed omnem attentionem impendunt in examinanda quaestione exactitudinis et in suo examine ad hanc conclusionem pervenire videntur, transitum ex datis geometricis sensitivis inexactis ad geometriam classicam exactam illegitimum esse. Ideo analysin modo pure arithmetico construere conantur. Utrum, hac analysi constructa, dein eius *applicatio* ad entia extensa, geometriae classicae aequivalens, possibilis sit, erit novum problema.

Non solent considerare problema necessitatis. In arithmeticis necessitatem sine analysi admittunt, sequentes intuitionem naturalem mentis humanae, quae sine dubio tam clara est, ut sine haesitatione admitti possit. Inde: problema ibi latens detegere et dein id solvere, est aliquid pure philosophici; mathematici suo iure id omittunt; iam in introductione (pag. 508) audiebamus Poincaré exclamantem: « quis dubitabit de Arithmetica? ». Et quod non idem de geometria affirmatur, unice provenit ex problemate exactitudinis, non ex problemate necessitatis: « intuitio non potest dare exactitudinem (la rigueur) » idem Poincaré dicebat de intuitione geometrica.

In unico tamen casu, scilicet ubi agitur de critica postulati V. Euclidis, ex qua geometriae non-Euclidicae proveniebant, quidam necessitatem in geometria deesse dicere videntur, eo quod geometria Euclidica iam non unice possibilis, ideoque necessaria, esse dicitur; sed si res bene examinatur, non volunt dicere nisi quod geometria classica non omnes casus praeviderat; sed in singulis casibus adest necessitas. Qui dein geometriam, applicatam ad corpora quae sunt in rerum natura, omnino aequiparant scientiae physicae, differentiam enormem, quae, iuxta exposita in capite primo, inter utramque scientiam relate ad necessitatem adest, his verbis quidem *negant*, sed reipsa eam potius *negligunt*.

Mathematici igitur non solent considerare problema necessitatis, sed eo maiores habent difficultates relate ad ea, quae problema exactitudinis spectant. Dicimus eos habere maiores difficultates, id quod non significat omnes bene distinguere has difficultates. Immo pauci forte sunt, qui clare intelligunt problema in hoc praecise consistere: quomodo et ubi transitus ex datis inaccuratis sensitivis ad notiones et propositiones accuratas in geometria classica possibilis sit.

Exacte, sed breviter, id iam in introductione (pag. 507 sq.) descriptum audiebamus a Klein et Poincaré; ibi (pag. 509) quoque sermo erat de sententia cl. Study, qui reconstructionem geometriae classicae, independentem ab analysi moderna, « somnium » (eine Utopie) vocabat. Idem auctor, in eodem libro [6] clare proponit problema, sed id solvere nequit, nisi considerando geometriam tanquam complexum hypothesium, quarum applicabilitas ad mundum realem examinanda est, omnino eodem modo ac physici id faciunt relate ad suas hypotheses. Tandem aliquando, ita faciendo problema insolubile esse declarat.

Nemo forte uberius et magis in specie problema exposuit quam cl. J. Wellestein in opere: 'Weber-Wellstein *Enzyklopaedie der Elementar-Mathematik* II (3 ed. 1925). Eius difficultates in punctis specialibus etiam exponemus; nunc objectionem generalem audiamus bene expositam. Postquam enarravit, criticam modernam fundamentorum geometriae in saeculo XVIII et XIX ex consideratione postulati V Euclidis originem habere, ita pergit:

> « Evolutio theoriae modernae functionum demonstravit, criticam fundamentorum debuisse incipere, non a postulato V, sed immediate a prima definitione [Euclidis]:
>
> σημεῖόν ἐστιν οὗ μέρος οὐθέν » [7].

[6] E. Study *Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume* pag. 74 sqq.

[7] Op. cit. pag. 9: « Die Entwicklung der modernen Funktionentheorie hat gezeigt, dass die Kritik der Grundlagen nicht am fünften Postulat, sondern gleich an der ersten Definition hätte ansetzen sollen:

σημεῖόν ἐστιν οὗ μέρος οὐθέν ».

His verbis problema exactitudinis clare ponitur; nam haec theoria moderna functionum in hoc praecise puncto opponitur theoriae praecedenti. Analysis enim antiquior, ut in introductione iam dictum est, « continuum numerorum realium », quo analysis indiget, ex consideratione continui geometrici deducebat; in hac theoria singulis punctis geometricis lineae (de quarum existentia geometrice constabat) singuli numeri reales correspondebant; numeri per « coordinatas » punctorum i. e. per eorum distantias (i. e. proportiones distantiarum ad unitatem longitudinis) ab origine lineae definiebantur. Moderna analysis hoc continuum numerorum realium independenter ab intuitione (sensitiva) continui geomtrici constituere volebat, propter inexactitudinem intuitionis sensitivae; et ideo incipit a serie numerorum integrorum, quae etiam sensitive exacta est; et ex his pure arithmetice, ut putat, numeros reales construit. Haec igitur inexactitudo intuitionis sensitivae iam primam notionem, quae ab Euclide describitur, notionem puncti, labefactare videtur; iam agitur de ipsa existentia mathematica puncti, de realitate notionis, quae puncto omnes partes denegat et ei situm tribuit. Dein eadem inexactitudo omnes alias notiones geometricas inficere dicitur.

3. — Ita de facto problema exactitudinis geometricae iterum insolubile declaratur. Sed ideo non destruitur hoc factum: quod per viginti saecula et amplius hae *notiones*, et quidem ut exactae, in mente humana tractantur, in mente humana aderant. Ex ente extenso, ut est extensum, intellectus humanus has notiones hausit et optime eas distinxit a minimis sensibilibus. Unde de praesentia harum notionum ipsarum in mente humana quaestio esse non potest.

Unica igitur quaestio haec esse potest: num existunt *objecta*, punctum, linea, superficies, stricte dicta, quae his notionibus exacte correspondent. Et, quia agitur de essentiis rerum, non est haec primaria quaestio, utrum de facto existant in rerum natura, sed altera illa: utrum extensum, ut extensum, admittat limites exactos, utrum *possint* existere et quomodo, utrum « eis competat esse » et quomodo.

In hoc ergo cedit prima quaestio: possuntne inveniri in ente extenso reali objecta ut: punctum, linea, superficies; dein inquirendum est: possuntne hae lineae esse perfecte rectae, perfecte circulares; possuntne hae superficies esse perfecte planae perfecte sphaericae; possuntne dari figurae distinctae perfecte inter se aequales; possuntne dari proportiones magnitudinales perfecte determinatae? Et ita porro.

Clarum est problema involvere quaestiones de existentia tum notionum tum nexuum, quae judiciis affirmantur. Ceterum praesertim notiones complexae iam praesupponunt iudicia de existentia nexuum inter notiones simplices.

Haec igitur quaestio, pure mathematico-philosophica, cum alia quaestione connexa quidem est, tamen ab ea distincta, scil. quaestione utrum in hoc mundo, in hac rerum natura, existant illa objecta exacta, utrum ibi de facto dentur lineae rectae, sphaerae perfectae, figurae congruentes; et ita porro. De hac alia quaestione etiam saepius agemus.

§ 2. De primis notionibus geometriae classicae.

1. — Primae notiones geometricae exactae, quas examinare oportet, sunt: punctum, linea, superficies. In § 1 iam audiebamus Wellstein dicentem, ab his criticam fundamentorum geometriae incipere debere.

Ipse (Op. cit. pag. 9-11) ita rem prosequitur, ut notiones illas ab experientia sensitiva legitime derivari impossibile esse concludat; si ab iis incipere volumus, debemus — ita ait — eorum objectorum existentiam *postulare*, et quidem actu voluntatis. Ideo transitus ab inexactitudine experientiae sensitivae ad geometriam exactam esset illegitimus, fundatus supra decretum voluntatis, non supra intuitum intellectus. Problema nostrum quod quaestionem de modo illius transitus ponet, esset insolubile.

2. — De puncto, linea, superficie.

Quoad notionem puncti Wellestein ita procedit. Dicit eam notionem oriri per progressum ad limitem (Grenzprosesz)

i. e. per actum mentis, qui finem imponit seriei phantasmatum, in se illimitatae (« durch einen Geistesakt, der einer an sich unbegrenzten Reihe von Vorstellungen ein Ziel setzt » pag. 9). Incipimus v. g. ab intuitione (sensitiva) granuli arenae quod semper minus nobis imaginamur. Inde oritur, et quidem modo semper magis determinato, imaginatio loci (« Ort ») in spatio, qui nullam iam dimensionem habet. Sed, ait, hic processus in imaginatione cito finem habet, scil. quando minimum imaginabile adest; inde ab hoc termino res nobis manet obscura; videndo vel imaginando non possumus amplius processum diminutionis persequi (« von da an sind wir vollkommen in Dunkeln, und den Fortgang der Verkleinerung können wir weder sehen noch uns vorstellen »). Id optime dictum est. Sed pergit: hunc processum finem habere cogitari nequit (« dasz dieses Verfahren ein Ende erreicht ist undenkbar »); hic iam appellat, et optime facit (quamquam non logice in sua positione) ad intellectum et quidem exactum. Intelligimus enim ita processum diminutionis finem non habere, si fit *dividendo* extensum; sed addendum est: si diminutio fit per *motum* continuum (motum diminutionis Aristotelis) finem utique habebit. Attamen in utroque casu admittenda sunt ea quae, apud Wellstein, sequuntur, scilicet: existere in hoc processu finem ultra quem pergere nequit et quem tamen non attingit (id in suppositione processus divisionis) debemus credere vel postulare (« dasz dagegen ein Ziel existiert, über das es nicht hinaus kann, ohne es je zu erreichen, müssen wir glauben oder postulieren »). Approbamus haec verba, etiam verba: « hunc finem, hunc limitem existere debemus credere vel postulare » sed addimus: si nihil aliud haberemus nisi methodum, quem Wellstein describit, si aliunde existentiam limitis indivisibilis non intelligeremus. Sed aliunde habemus intuitum intellectivum huius limitis, ut statim videbimus.

Si autem, ita Wellstein pergit post quasdam dilucidationes, postulare debemus tali modo existentiam puncti, id est pure actus voluntatis, non intellectus (« so musz man sich bewuszt bleiben, dasz das ein reiner Akt des Willens, nicht des Verstandes ist »).

Et ex sua analysi concludit: ad primam definitionem Euclidis debere addi postulatum, quo petitur: *Existunt* puncta (« zu der ersten Definition gehörte also auf alle Fälle ein Postulat, dasz es uberhaupt Punkte g i b t » ibid.). Si attendimus ad naturam postulati, ut hic describitur, ipsissima prima notio geometriae Euclidis esset proles actus voluntatis non intellectus, id quod ruinam geometriae, modo classicae interpretatae, secum ferret. Transitus intellectivus datis sensitivis inaccuratis ad notiones geometricas exactas iam inde a primo gressu declaratur impossibilis; problema exactitudinis nostrum solutionem non habet.

Simili modo ac notio puncti apud Wellstein derivatur a corpusculo parvo, granulo arenae, notiones lineae et superficiei deducuntur. Linea consideratur ut filum tenue, superficies ut folium tenue, quae in indefinitum tenuiora fiunt; et limes huius processus erit linea geometrica resp. superficies geometrica. Et in his casibus eaedem difficultates inveniuntur.

Revera, si ita tantum notiones exactae geometricae oriri possent, res decisa esset; sed si aliunde existentia limitum indivisibilium intelligitur, hi processus ad limitem sunt omnino legitimi; existentia eorum limitum iam non *postulanda* est; objecta harum notionum exactarum in ente extenso existere *intelligimus*. Hunc autem intellectum de facto habemus, ut ex sequentibus clare patebit.

3. — Divisio entis extensi (solidi).

Ut hunc intellectum inveniamus, non incipimus a puncto, sed ab eo quod in tota hac materia est primum datum: ab ente extenso, ut est extensum, non a parvo corpore, sed a corpore cuiusvis magnitudinis; ab ente extenso quod sese statim revelabit ut extensum secundum tres dimensiones, ut « moles », ut « solidum ».

Primum « proprium » quod in ente extenso, intuitu intellectus inspicientis phantasma, statim detegimus, est eius divisibilitas. Dividatur ergo tale extensum in duas partes, sed tantum dividatur, partes ne moveantur, ne separentur ab invicem.

Nunc partes relate ad invicem *limitatae* sunt; hoc sensu, sed hucusque hoc sensu tantum *existit limes inter eas*. Iterum statim clarum est, *per* limitem posse fieri *transitum* ab una parte in aliam. Et, bene attendamus: clarum est, transitum fieri *in indivisibili*; hoc ultimum non est clarum imaginationi, quae indivisibile percipere non potest, sed clarum est intellectui; *hic ergo limes inter partes, ut transitum praebens, est indivisibilis.*

Possumus addere quaedam, quae rem magis describunt, sed hic intuitus intellectivus iam totum id, quod inquirimus, patefacit. Transitus ab una parte in aliam fit in indivisibili; ideo inter partes, in quantum ad invicem limitantur, est oppositio sicut inter *contradictorie* opposita; quando id quod transit (potest esse id per quod una pars tangit aliam) ab una parte transit i. e. iam non est in illa, eo ipso est in alia; non datur extensum inter duas partes; et ita porro.

Superficies. Hic igitur limes est superficies et describi potest: « id per quod fit transitus ab una parte in aliam »; et tunc praecise sub respectu sub quo per id fit transitus, est indivisibilis. Et ita primum indivisibile, exacte indivisibile (prima notio exacta geometrica), invenimus intellective in phantasmate, in quo haec exactitudo deest et nunc cognoscitur deesse; id invenimus eadem certitudine, qua in eodem phantasmate entis extensi legebamus *necessitatem* eius divisibilitatis. In eodem actu, si attendimus, tum necessitatem tum exactitudinem primi huius iudicii geometrici attingimus, quamquam nec necessitas nec exactitudo in cognitione sensitiva adest; *sub utroque respectu* intellectus transcendit sensum. Utrumque inservire potest ad demonstrandam differentiam inter *phantasma*, quod nec necessitatem (sed factum tantum) nec exactitudinem in se continet, ex una parte, et *ideam* ex alia parte; et differentia relate ad exactitudinem incipientibus est forte clarior quam relate ad necessitatem.

Existit ergo limes indivisibilis (indivisibilis sub respectu praeciso sub quo est limes: id per quod fit transitus) in ente extenso, primo dato, et oritur actu per eius divisionem.

Hic autem limes est superficies, est id in quod (« contra quod ») inspicimus aspiciendo corpus limitatum [8]. Non utique est semper superficies plana, immo nec polita, sed ut limes ubique est indivisibilis. Sed sub aliis respectibus (secundum latitudinem et longitudinem) clare sese nobis manifestat ut extensa, divisibilis.

LINEA ET PUNCTUM. Relate ad hanc divisibilitatem superficiei similis consideratio, ac supra exposita est, hic repeti potest. Limes inter partes superficiei est iterum « id per quod fit transitus ab una parte superficiei in aliam »; hic transitus fit iterum in indivisibili; hic limes, indivisibilis ut limes, est linea, sive curva sive alia.

Linea sub alio respectu (in quantum non est id per quod fit transitus) est iterum extensa, divisibilis. Et ex eius divisione oritur punctum, quod est limes lineae, per quod fit transitus ex una parte lineae in aliam, iterum in indivisibili. Sed nunc tandem aliquando — id iterum patet puro intuitu intellectus in phantasmate — hic processus divisionis finem habet; pervenimus ad id quod est omni ex parte indivisibile: punctum geometricum, ad id quod ab Euclide describebatur: οὗ μέρος οὐθέν. Id non est nihil: est limes lineae, quae est limes superficiei, quae est limes entis extensi originarii, nobis immediate dati ex experientia externa. Quia punctum est talis limes, ideo non tantum est quid indivisibile (omni ex parte) sed est « indivisibile positionem habens » quae est definitio sollemnis apud Aristotelem et S. Thomam.

De existentia igitur mathematica horum limitum constat; existunt in potentia intra ens extensum non divisum; existunt

[8] Forte aliquis ex hac inspectione in superficiem corporis limitati iam vellet habere ideam superficiei et quidem ita, ut in ipsa sensatione iam esset indivisibilis ut limes corporis; nobis hoc non sufficit; putamus enim nos in sensatione superficiei iam videre aliquam profunditatem corporis; ita ut iam ex hac sensatione habeamus notionem tertiae dimensionis. Ceterum si hoc non esset verum, methodus nostra intuitionis intellectus esset adhibenda ubi agitur de linea et puncto, ut statim indicabimus; nam linea certe non sine latitudine est in sensatione nostra.

actu per divisionem entis extensi; et quidem primo oritur superficies, dein linea, dein punctum. Haec necessario sequuntur ex natura entis extensi, ut est extensum.

Si quis ut ideam lineae vel puncti concipiat, vult sequi processum, qui a Wellstein descriptus est i. e. si quis vult incipere ab imaginatione granuli arenae (resp. fili tenuis) et processum diminutionis huius objecti persequi, id nunc sine incommodo facere potest; iam enim scit *existere* limitem ad quem per hunc processum appropinquamus. Et nunc processus quem Wellstein describit, erit legitimus; iam non *postulatur* existentia limitis; et ita revera pervenimus ad notionem puncti resp. lineae.

DE INDIVISIBILIBUS IN RERUM NATURA. Existuntne indivisibilia haec in rerum natura? Dicamus primo de superficie; ibi res est statim clara. Existunt corpora limitata et horum limes est superficies. Non utique opus est, ut sit superficies geometrice simplex: planum, superficies sphaerica perfecta, et ita porro. Forte ea quae in rerum natura inveniuntur, sunt tales, ut nomen geometricum non habeant; forte habent formas valde complicatas, forte sunt vehementer ruginosae, modo tam microscopico, ut id experientia detegi non possit. Sed sunt veri nominis superficies, quae limitant corpora; transitus per hos limites, ex non-hoc-corpore in hoc corpus, fit in indivisibili. Possuntne existere in rerum natura superficies illae, geometrice simplices, quae a geometris considerari solent? Responsum dependet primarie a quaestione utrum hae mathematice existant, utrum possibiles sint in ente extenso ut est extensum; haec quaestio postea habebit responsum affirmativum, ex quo sine negotio sequetur has superficies etiam in natura possibiles fore.

Existuntne de facto lineae in rerum natura? Responsum hypotheticum est facillimum: si existunt superficies limitatae, necessario existunt limites earum i. e. lineae. Sed num conditio adimpletur? Id non est a priori necessarium; omnia corpora possunt limitari per superficies, quae sunt sicut limes globi perfecti. Ecce haec superficies est finita quidem, sed non est limitata. *Est* ipsa limes, scil. limes corporis (globi) sed in se limitem, qui eam dividit, non habet. Ibi non existit actu linea. Si omnia corpora ita limitata essent, non existeret de facto linea in rerum natura. Sed mathematice i. e. ut sunt extensae, illae superficies divisionem admittunt et, si adest, utique de facto erunt lineae.

Similis quaestio de existentia actuali punctorum poni potest et simile responsum habet.

4. — De dimensionibus.

Loquebamur de « respectu sub quo superficies est indivisibilis », de « respectibus sub quibus dividi potest »; similiter de linea relate ad superficies, quarum est limes. His respectibus correspondent « dimensiones » quae dici solent. Id quod processu divisionis supra descripto detegimus, vere detegimus in mente nostra, considerante ens extensum, illud ens extensum cuius notionem directe per abstractionem a phantasmate haurimus, est hoc: processus divisionis triplici vice ad illud ens extensum applicari potest; primo ad ipsum illud ens, dein ad limitem, qui ex prima divisione resultat, dein ad limitem qui ex secunda divisione habetur. Sed limes, qui est effectus tertiae divisionis, iam non potest huic operationi subjici, est omni ex parte indivisibilis, est punctum geometricum. Ecce id quod clare intuitu intellectivo in phantasmate nostro intuemur. Id cuius limes est punctum, est linea quae est *extensa secundum unam dimensionem*; id cuius limes est linea, est *extensum secundum duas dimensiones*, est superficies; id cuius limes est superficies, quod est extensum originarie datum, erit *extensum secundum tres dimensiones*.

Quid sit dimensio, definitione technica, quae constat ex genere et differentia specifica, definiri nequit. Tamen haec notio est perfecte clara; quid sit, perfecte intelligitur ex processu supra delineato. Ens extensum quod habet tres dimensiones, est extensum quod triplicem illam divisionem sustinet; et in hoc ente extenso dari possunt limites, qui duas dimensiones habent, resp. unam vel nullam.

Ecce criterium claritatis huius notionis: Interrogamus, possuntne dari entia extensa, quae v. g. habent duas dimensiones et dimidiam? Quaestio ne sensum quidem habet; et quod id statim videmus, inde provenit quod notio dimensionis est clarissima.

Dicebamus supra: existunt mathematice in ente extenso (sive actu sive in potentia) hi limites, qui sunt superficies, linea, punctum; et consequenter possunt existere in rerum natura. Id significat: haec entia nullius vel unius dimensionis vel duarum dimensionum *ut limites* existunt; inde non sequitur ea posse existere separatim. Datur ens trium dimensionum: corpus, substantia extensa. *Possuntne* dari entia substantialia duarum dimensionum, vel unius vel nullius (quod tamen ad mundum extensum pertineret ut « positionem habens »)? Id sane non sequitur ex supra expositis, ex quibus scimus ea extensa ut limites existere. Ad quaestionem utrum talia entia, saltem duarum dimensionum vel unius, separatim existere possint, auctor non potest aliter respondere nisi confitendo plenam suam ignorantiam.

Potestne existere ens quatuor dimensionum, cuius limes esset ens trium dimensionum? Iterum fateor libenter me omnino carere responso quomodocumque fundato ad hanc quaestionem. Tantum miror dari mathematicos, qui hic sine ullo scrupulo affirmative respondent et qui tamen in genere, ubi movetur quaestio de existentia mathematicae, de possibilitate figurae, tam critici sunt. Vide *Cosmologiam* pag. 447-450.

5. *De objectione ex « folio Moebii » desumpta.* Methodus nostra investigandi notiones superficiei, dein lineae, dein puncti, videtur esse naturalis menti humanae; et saepissime inveniuntur locutiones quae haec objecta tanquam limites definiunt. Sed contra hanc methodum a quibusdam auctoribus objectio movetur, quam decisivam esse putant; inde nobis consideranda est. Sumitur ex illa superficie, quam in articulo secundo (pag. 37 sqq). iam considerabamus, quae vocatur « folium Moebii ».

Haec superficies habet quandam proprietatem miram; dicitur esse *unilateralis*. Quid hoc significet clarum erit ei, qui visu aspicit imaginem illam physicam, cuius constructionem in illo capite descripsimus. Ducamus lineam in illa charta, in medio fere folio et quidem parallelam ad eius marginem; hanc lineam ducendo in fine iterum attingimus punctum unde incipiebamus et ecce: linea invenitur in utroque latere (facie) folii nostri, quin tamen per marginem pertransierimus. In eodem ergo latere permansimus, folium videtur unum tantum latus habere. Si idem facimus in folio cylindrico, in uno tantum latere linea ducta est, aliud remansit album. Inde folium Moebii dicitur esse unilaterale, apparenter tantum est bilaterale sicut folium cylindricum. Haec ut intelligantur, omnino videnda sunt in executione reali; quae tamen, ut in primo capite videbamus, intuitum necessitatis huius proprii manifestare intellectui potest. Est utique proprietas curiosa.

Ecce quomodo ex hac proprietate superficierum, quae unilaterales dicuntur, objectio fiat contra nostram methodum definiendi superficies, quae superficiem tanquam limitem inter partes extensi trium dimensionum considerat.

Ait cl. Couturat:

« Quidam auctores superficiem definiunt tanquam id quod solidum limitat. Sed existunt superficies quae non habent nisi unum latus, vel quarum bina latera modo continuo in invicem transeunt, ita ut spatium non in duas regiones separatas dividant, *et consequenter non possint inservire ad limitandum solidum* » [9].

Simili modo Wellstein:

« In formando conceptu superficiei tantum ex superficie externa vel ab eo quod est duobus corporibus commune initium sumere, non sufficit, quia existunt superficies, quae non, ut totum quid, possunt limitare corpora, quae non possunt esse superficies limitantes duo corpora ». (Op. cit. pag. 10) [10].

Contendunt igitur talem superficiem unilateralem non cadere sub definitione nostra superficiei (limitis inter duas partes

[9] Couturat *Revue de Métaph. et de Morale* 1904 pag. 810: « Certains auteurs définissent la surface comme ce qui limite un solide. Or il existe certaines surfaces qui n'ont qu'une face, ou dont les deux faces se relient d'une manière continue, de sorte qu'elles ne partagent pas l'espace en deux régions séparées, et ne peuvent par suite servir à délimiter un solide ».

[10] Bei der Bildung des Flächenbegriffs nur von der Oberfläche oder dem zwei Körpern Gemeinsamen auszugehen, ist nicht ausreichend, weil es Flächen gibt, die nicht als Ganzes Oberfläche eines Körpers, nicht Trennungsfläche zweier Körper sein können ».

entis extensi solidi) quia, eo ipso quod sunt unilaterales, non possunt limitare solida.

Errant tamen: ut notio superficiei (limitis per quem fit transitus in indivisibili) verificetur et ut exactitudo notionis (indivisibilitatis) manifesta sit, sufficit ut quaevis pars folii Moebii sumatur; haec pars ubi adest (sumamus folium inter duos digitos, quae per talem partem ab invicem separantur) evidenter est limes, per quem, ut intellectus intuetur, fit transitus in indivisibili; nullo alio indigemus.

Hanc solutionem, simplicem sed decisivam, difficultatis iam indicatur a cl. A. Voss, qui ait:

« Existunt utique superficies unilaterales, quae nullam partem spatii limitant, sed haec proprietas eis tantum propter specialem connexionem competit, dum partes elementares characterem indicatum conservant » [11].

Alia consideratio folii Moebii (etiam integri i. e. talis, ut eius connexus, Zusammenhang, conservetur et una facies cum altera continuetur) momentum haberet; sed eam omittimus, quia dicta sufficiunt ad solvendam objectionem, quae contra nostram methodum inveniendi et definiendi superficies movetur.

6. — Quae ex his colligantur pro theoria generali cognitionis.

Theoria Aristotelis. In supra dictis legere possumus: In ente extenso, ut est extensum, possunt dari limites, qui ut limites sunt indivisibiles; hoc cognoscitur ut *proprium* entis extensi, ex eius natura necessario profluens. Hoc proprium non attingitur a cognitione sensitiva, quippe quae hac exactitudine caret. De ente extenso, prout « esse » habet in ipsa cognitione *sensitiva*, sive externa sive interna, haec exactitudo non potest affirmari; ibi enim non adest, ibi limites sunt divisibiles, incerti, non ex integro determinati. Exactitudo, indivisibilitas limitum,

[11] A. Voss *Ueber die mathematische Erkenntnis* in *Die Kultur der Gegenwart* III pag. E 96: « Allerdings gibt es einseitige Flächen, die keinen Raumteil begrenzen, aber dies Eigenschaft kommt ihnen nur ihres besonderen Zusammenhangs zufolge zu, während ihre elementaren Teile den angegebenen Charakter bewahren ».

quae est intellectu, tantum affirmari potest et debet de ente extenso, prout « esse » habet in se, in realitate, et ibi necessario affirmanda est.

Et tamen haec cognitio, exacta et exactitudinis, ab intellectu hauritur ex imagine sensitiva per abstractionem intellectus a phantasmate, per intuitum intellectus in phantasmate. Et quidem etiam ut *iudicemus,* indigemus inspectione phantasmatis. Quod transitus quem supra descripsimus datur, (ecce iudicium), nobis non illucescit nisi inspicientibus phantasma. Haec utique iudicia tunc tantum explicite enuntiatur, quando de ipsa hac quaestione epistemologica fit examen (sicut nos supra fecimus): immo videntur pertinere ad iudicia illa *virtualia,* de quibus in articulo praecedente (§ 3 n. 4 pag. 45 sq.) agebamus.

Teste igitur conscientia influxus phantasmatis requiritur; in ipso inspicimus et ex ipso haurimus id quod affirmatur, sive explicite sive implicite sive virtualiter; inde dicendum est, non tantum intuitum sed simul etiam abstractionem intellectus agentis in hoc processu adesse. Theoria igitur abstractionis Aristotelis hic omni ex parte verificari videtur. Id optime a S. Thoma describitur in textu notissimo (*S. Th.* q. 84 a. 6 in fine) cui, agens de operatione intellectus agentis, ait: « non potest dici quod sensibilis cognitio sit totalis et perfecta causa intellectualis cognitionis, sed magis quodammodo materia causae; et in resp. 3 eiusdem articuli: « sensitiva cognitio non est tota causa intellectualis cognitionis; et ideo non est mirum, si intellectualis cognitio ultra sensitivam se extendit. Utrumque dictum optime quadrat cum eis quae in cognitione horum entium mathematicorum invenimus.

Ex datis igitur sensitivis hauritur iudicium intellectivum de indivisibilitate limitum; sed id quod iudicium affirmat, non affirmat de extensis, prout « esse » habent in illis datis sensitivis (ibi non verum esset, uti iam dictum est) sed de ipsis extensis, prout « esse » habent in se. Id in genere de omni cognitione affirmandum est et dicendum: phantasmate indigemus, ut ideas abstrahamus et iudicemus sed id quod primo cognoscimus, non est phantasma sed res; id quod affirmatur, non de phantasmate dicitur, sed de re. Quare optime S. Thomas, agens

de effato Aristotelis: τῇ δὲ διανοητικῇ ψυχῇ τὰ φαντάσματα οἷον αἰσθήματα ὑπάρχει (*De Anim.* III 6, 431 a 140), ait (*S. Th.* III q. 11 a. 2 ad 1):

« Similitudo illa quam Philosophus ponit, non attenditur quantum ad omnia. Manifestum est enim quod finis potentiae visivae est cognoscere colores; finis autem potentiae intellectivae non est cognoscere phantasmata, sed cognoscere species intelligibiles [12] quas apprehendit a phantasmatibus et in phantasmatibus secundum statum praesentis vitae. Est igitur similitudo quantum ad hoc quod aspicit utraque potentia, non autem ad hoc in quod utriusque potentiae conditio terminatur ».

Juxta hanc theoriam universaliter id quod in iudicio affirmatur, non de phantasmate dicitur, sed de re quae in phantasmate repraesentatur; casus nostri (de limitibus geometricis) hoc peculiare habent (quod non universaliter valet): si id quod in iudicio affirmatur, de ipso phantasmate diceretur, *falsum* esset. Nam mens potest quidem, per reflexionem in suas operationes redire, et ipsum phantasma ut obiectum cognitionis considerare; id nos praecise fecimus in analysi nostra. Et ex tali reflexione resultat id quod dicebamus: in ipso phantasmate, et in sensibilitate in genere, non adest illa exactitudo, quae in iudicio intellectus de limite entis extensi affirmatur; ergo de ente extenso prout in phantasmate « esse » habet, cum veritate affirmari non potest. Id vero quod affirmamus, valet quidem de extenso *in se*; de hoc asserimus id quod in *idea* (composita) adest cum exactitudine.

Theoria Platonis. Si analysis nostra confirmat theoriam Aristotelis, aliae per eam excludi debent. Et revera quoad theoriam Platonis dicendum est: 1) munus sensibilitatis non est praeparare et evocare reminiscentiam. Ex datis sensibilibus mens nostra vere haurit notionem extensi et, ut eam consideret debet phantasma revocare, et simul in eo legit exactitudinem limitis; modus quo id fit non videtur melius describi posse quam verbis S. Thomae: data sensitiva non sunt causa totalis et perfecta

[12] S. Thomas, uti notum est, non intendit dicere, intellectum primo cognoscere suas species, sed species quae sunt in rebus.

(sunt ergo causa partialis et imperfecta) sed sunt quodammodo, materia causae. 2) Id quod in phantasmate legimus intellectu, clare indicat, in extenso ut tali, ergo in extensis physicis quoque, debere dari limites exactos.

THEORIA KANTII. Etiam theoria formae subiectivae Kantiana videtur ex analysi nostra peremptorie refutari. Nam in hac theoria extensio non invenitur in ente in se, nobis ignoto, sed tantum in ente phaenomenali, quod non habet « esse » nisi in cognitione nostra sensitiva. Sed iuxta hunc modum essendi extensum *caret* exactitudine limitum. Ergo cognitio exacta intellectiva geometrica *nullibi* applicationem inveniret : non in ente in se, quia extensione caret, non in ente phaenomenali, quia exactitudine caret.

THEORIA EMPIRISMI. Ex iis quae videbamus nunc etiam quaedam dicta a Stuart Mill iam refutata sunt. Recolamus eius effata (supra pag. 324) : « non existunt puncta sine magnitudine; non lineae sine latitudine nec perfecte rectae ... non circuli quorum radii sunt perfecte aequales ... immo nec possibiles quorum radii sunt perfecte aequales. ... immo nec possibiles sunt ». Haec nunc patent esse falsa quoad existentiam (saltem possibilem) indivisibilium : puncti, lineae sine latitudine. Utrum idem dicendum sit de elementis qualitativis et de aequalitate (lineis perfecte rectis et radiis circuli perfecte aequalibus) quae ab eo negantur, nunc nondum constant. Id pertinet ad alteram partem problematis exactitudinis, cuius solutio ab alio medio inquisitionis criticae dependet; ideo supra diximus, hunc auctorem diversos aspectus exactitudinis confundere.

Falsum quoque est id quod ab eodem auctore audiebamus : « ideam nostram puncti concipio esse ideam *minimi visibilis* »; invenimus enim in nostra analysi notionem limitis exacti, quae ducit ad notionem puncti exacti et simul invenimus iudicando existentiam mathematicam harum notionum exactarum.

NOTA. Analysin nostram *incepimus in eo puncto*, in quo primo intuitionem *intellectivam* in ens extensum detegimus : in eius divisibilitate, limitatione exacta, divisibilitate triplici, correspondente tribus dimensionibus. In analysi detegimus *intelligibilitatem* huius extensi, nam ea quae affirmamus, novimus tanquam propria profluentia *necessario*, ergo intelligibiliter, ex eo quod est extensum. Unde — omne intelligibile est ens, ei competit esse — ex eo et in eo momento scimus : hoc extensum est ens, ei competit esse. Ideo non opus est, ut originem dati sensibili inquiramus.

Quomodo cognitio sensitiva ipsa, in qua hoc intelligibile invenimus, oriatur, in specie quomodo perveniamus ad cognitionem sensibilem extensi, quod sese dein revelat ut tridimensionale, potius est quaestio psychologica. Theoria cognitionis intellectivae illius cognitioni (quae est scientia geometrica) incipit ab illa intuitione intellectuali.

Supra per transennnam attendimus ad sententiam, quae in cognitione sensitiva iam vult invenire superficiem sine profunditate, extensum secundum duas dimensiones. Haec nobis videtur non esse vera; putamus in aspectu sensibili primo « superficiei » iam iam adesse aspectum cuiusdam profunditatis. Sed quia haec quaestio pertinet ad ea quae antecedunt illam primam intuitionem intellectivam, de ea non agemus. Ceterum, si haec sententia esset vera, tamen intacta maneret analysis nostra relate ad lineam et punctum; nec falsa esset relate ad existentiam superficiei exactae.

7. — DE DIVISIBILITATE IN INFINITUM.

A. - DE DIVISIBILITATE IN EXTENSA. Notio indivisibilium (exactitudinis igitur) permittit ampliationem eorum quae, relate ad divisibilitatem extensi, ex consideratione solius necessitatis profluunt.

Ex hac enim iam scimus : extensum dividi potest in duas partes; non opus est ut hae sint aequales (id enim iam importat elementum exactitudinis), sed sunt quidem extensae, sicut totum erat extensum. Id intelligitur ex inspectione phantasmatis cuiusvis extensi v. g. lineae (utique inexactae). In hoc phantasmate intellective intuemur, divisibilitatem profluere tanquam

« proprium » ex natura extensi, ut est extensum; insuper intuemur, partes eandem naturam extensi habere ac totum. Notio extensi in eis aeque plene verificatur ac in toto cuius sunt partes. Et ipsae igitur dividi possunt in duas partes extensas minores. Imaginatio nostra ita tantum usque ad quoddam limen progredi potest i. e. usque ad quoddam *minimum imaginabile* (quod non est exacte determinatum). Sed etiam hae partes notionem « extensi » *univoce* (cum toto originario) verificant. Et quia ex natura extensi profluit: « dividi potest in extensa », idem valet de minimo imaginabili, idem valet de eius partibus: in infinitum.

Inde habemus: ex illo uno phantasmate, a quo incipiebamus, aspiciendo vel « observando » intelligere possumus: *omne* extensum (linea) est divisibile in duo extensa minora; « omne », i. e. pro toto genere valet principium; exprimit propriam passionem extensi, ut est extensum. Dein: omne extensum, quia extensum, est divisibile in duo *extensa* minora, quae igitur sunt divisibilia in duo extensa minora: in infinitum. Id legimus in phantasmate, sed transcendendo phantasma. Non quidem in eo, quod puncta exacta iam inventa sunt; de punctis non erat sermo; sed in eo, quod intelligimus dari extensa quae sunt minora, quam minimum imaginabile. Et haec « dichotomia » procedere potest in infinitum; ita semper aliquid ulterius dividendum remanet.

Hoc principium divisibilitatis in infinitum ope elementorum exactorum (punctorum) magis stringi potest. Per dichotomiam (et etiam per trichotomiam et ita porro) extensum utique non ita dividi potest, ut indivisibilia tantum resultent. Quaeri potest: nonne id effici posset per divisionem unicam, non successive, quae uno ictu divisibilitatem exhauriret, nonnisi indivisibilia relinqueret? Id ex superioribus non decisum est, sed responsum negativum aliunde constat.

Ecce: partes in quas extensum dividitur, si ad invicem adduntur, iterum constituunt extensum quod est aequali toti primitivo. Unde: extensum componi potest ex iis in quae dividi potest. Indivisibilia autem, puncta, carent omni extensione, sunt « nihil extensionis »; et ex additione nihili ad nihilum non potest resultare aliquid; ex punctis additis non potest resultare extensum. Immo dicendum est: additio *geometrica,* quae in casu linearum, quae ad invicem adduntur, sensum perfectum habet, in casu puntcorum *sensu* caret; nihil non potest addi nihilo, sed tantum quantitas quantitati; (Additio punctorum *arithmetica* sensum utique habet: possumus considerare unum, duo, tria, etc. puncta).

Si autem extensum non potest componi ex punctis, nec in ea, tanquam in partes, dividi potest. Inde sequitur, *quomodocumque* extensum dividatur (non per dichotomiam tantum), *semper* dividitur in extensa, quae iterum dividi possunt; et ita universaliter statuendum est; in infinitum est divisibile. (De momento huius divisibilitatis in historia philosophica continui vide *Cosmologiam* pag. 22-40).

B. - De linea ut « collectione » punctorum. Ex dictis quaedam sequuntur quae notatu digna esse possunt. Manifestum erat, lineam non posse componi ex punctis; unde a fortiori non poterit esse collectionem punctorum, si vox « collectio » sumitur sensu consueto, vulgari i. e. ita ut linea ex *sola* additione vel positione punctorum oriretur. Dicimus « a fortiori », quia linea est continua (ut distinguitur a serie contiguorum), ergo intrinsece una et haec pura collectio non esset nisi series contiguorum. Sed insuper utique dicendum est: si unitas intrinseca solvitur, linea non potest solvi in collectionem punctorum.

Iam in antiqua geometria sermo est de linea, ut est « locus punctorum », quae certam proprietatem habent; ita bissectrix anguli est locus punctorum aeque distantium ab eius cruribus. Haec locutio non intendit illam lineam describere tanquam collectionem punctorum sensu vulgari; sed sensus est: omne punctum aeque distans a cruribus anguli situm est in illa linea, et vice versa, omne punctum illius lineae est aeque distans a cruribus anguli. Bissectrix non consideratur nisi ut « matrix » illorum punctorum, est potentia (materia) ex qua et in qua puncta aequidistantia actuari possunt.

Aliter res sese habet in theoria moderna collectionum, quae a Cantor constructa est, saltem si concipitur eo modo quo originaliter ab illo auctore intendebatur. Ibi revera, si de linea tanquam « collectione punctorum » sermo erat, eam intelligebant ut puram seriem punctorum contiguorum. Simili modo aliae collectiones, quorum individua (elementa) per solam definitionem *generis* vel *speciei* determinata erant, iam considerabantur tanquam constitutae ex multitudine (in genere actu infinita) *individuorum* datorum, in se determinatorum. Id utique, iuxta supra expositis admitti nequit. Sed haec theoria nativa ad contradictiones (« paradoxa ») duxit; inde a plurimis mathematicis tantum in forma correcta adhibetur, in qua, data definitione generica vel specifica (data lege formationis collectionis) elementa individua nondum ut in se determinata considerantur. Talis collectio verificat notionem potentiae Aristotelis, quae (ad individua) actuanda est per ulteriorem determinationem. In tali theoria linea iam non est collectio i. e. series punctorum, sed est potentia, in qua puncta actuari possunt, est, ut Brouwer ait (in opere *Over de grondslagen der wiskunde* 1907 pag. 8) : « matrix punctorum simul cogitandorum ». Et operae pretium esset, si mathematicus, qui theoriam Aristotelicam potentiae callet, vellet evolvere theoriam collectionum, quae magnum momentum habet, sub luce huius theoriae Aristotelicae.

Plurimi, ut dictum est, nativam theoriam collectionum iam non admittunt, sed loco eius, theoriam quae plus minusve corrigebatur. Eam plene adhuc admittere videtur B. Russell, qui ex ea antinomias classicas continui realis se solvere posse putabat (Cfr. *Revue de Mét. et de Mor.* 1911 pag. 183; cfr. *Cosmologiam* pag. 432); perperam utique, ut ex praemissis patet. Mathematici qui theoriam nativam collectionum corrigunt, saltem plurimi ut nobis videtur, putant eius contradictiones provenire ex eo, quod infinitum actuale admittit. Ita Poincaré (*Science et Méthode* pag. 212) ait : « *Il n'y a pas d'infini actuel;* les Cantoriens l'ont oublié, et ils sont tombés dans la contradiction » (sublineatio est ipsius Poincaré; cfr. quaedam plura in *Cosmologia* pag. 431-435).

Quidquid id est, extensum non potest considerari ut collectio punctorum, ex quorum additione vel positione originem habet; poterit considerari ut materia, potentia, ex qua et in qua in infinitum puncta generari possunt. Saepius in expositionibus

mathematicis extensa vel figurae ut collectiones punctorum describuntur; semper attendendum est utrum id in primo vel altero sensu fiat; si in primo, periculum erroris adest; et, si errores evitantur, tamen talis expositio philosophice iustificari non potest. Id etiam (non tantum) obtinet in aequationibus geometriae analyticae, de quibus notam addimus.

NOTA DE AEQUATIONIBUS GEOMETRIAE ANALYTICAE. Talis formula indicat relationem, quae est inter coordinatas, quae determinant puncta quae sita sunt v. g. in linea. Haec linea, si aliunde definita est, erit classicus « locus » horum punctorum, quae determinatam proprietatem habent; haec proprietas a formula exprimitur. Si ipsa formula adhibetur ad definitionem lineae, periculum esse potest ne linea consideretur tanquam collectio punctorum sensu incorrecto. Sit v. g. aequatio $y = \sin x$. Haec determinat puncta quorum « ordinata » y per formulam indicatam calculari potest electo valore arbitrario « abscissae » x. Singulis abscissis correspondet una ordinata; electa una abscissa, determinata est ordinata et consequenter determinatum est punctum. Si quis hoc ita interpretatur, ut linea construi possit ex punctis ita determinatis considerat lineam tanquam collectionem i. e. seriem punctorum contiguorum. Sed ita linea oriri nequit. Ideo alia interpretatio quaerenda est; ecce una quae a mathematicis saepe explicatur. Scilicet : Abscissae (x) tribuitur variatio *continua,* quae nonnisi per motum habere potest, non per electionem successivam valorum determinatorum; linea igitur perpendicularis axi abscissarum ita moveatur motu continuo secundum legem determinatam et a solo tempore, tamquam variabili independente dependeat : $x = f(t)$. In ipsa ista linea moveatur punctum, iterum motu continuo, qui sua lege determinatur et a solo eodem tempore dependet; distantia puncti a linea abscissarum semper ordinatam indicat : $y = F(t)$. Ex compositione horum motuum resultat motus continuus, qui lineam generat, cuius aequatio inveniri potest per eliminationem variabilis t ex duabus aequationibus : $x = f(t)$ et $y = F(t)$. *In* casu nostro duo motus simpliciter exprimi possunt aequationibus $x = t$ et $y = \sin t$. Et sensus geometricus nunc est : linea (ordinatarum) movetur; semper perpendiculariter ad axim abscissarum (x) motu uniformi ($x = t$); simul punctum in illa linea movetur ita ut distantia ab axi abscissarum exprimatur per legem $y = \sin t$; movetur igitur in linea recta, secundum motum periodicum ascendendo et descendendo. Et ex his duobus motibus resultat motus compositus puncti, quod describit lineam quae correspondet aequationi: $y = \sin x$. Linea ita resultans iam non est collectio i. e. series punctorum, sed est continua, propter continuitatem motus.

Applicatio. Haec applicari possunt ad solvendum argumentum, quod a multis mathematicis modernis movetur *contra* valorem intuitionis, ex qua geometria classice ortum habet. Argumentum sumitur ex functionibus, quae sunt analytice quidem continuae sed non habent « derivatam » (quotiens differentiale) sive pro uno valore variabilis independentis, sive etiam pro omnibus. Functionibus continuis geometrice correspondent curvae continuae; « derivatae » in uno puncto correspondet tangens in illo puncto ad curvam. His igitur functionibus corresponderent curvae, quae essent quidem ubique continuae, sed carerent tangente in uno puncto, immo in singulis punctis. Sed imaginatio intuitiva, quae classice est radix intuitionis intellectivae, non potest sibi repraesentare curvam continuam quae non habet ubique tangentem; et, si intellectus ex hac immaginatione transire debet ad lineas exactas, affirmare debet: non datur linea continua quae non habet ubique tangentem. Sed, aiunt, analysis exacta demonstrat dari tales lineas; intuitio ergo in errorem ducit et ei iam fides deneganda est.

Operae pretium est ut hoc argumentum expositum audiamus a viro eximio, H. Poincaré (*La valeur de la science* pag. 17 sq.). Ait:

« L'intuition ne peut nous donner la rigueur ni même la certitude, on s'en est aperçu de plus en plus.

Citons quelques exemples. Nous savons qu'il existe des fonctions continues dépourvues dérivées. Rien de plus choquant pour l'intuition que cette proposition qui nous est imposée par la logique. Nos pères n'auraient pas manqué de dire: « Il est évident que toute fonction continue a une dérivée, puisque toute courbe a une tangente.

Comment l'intuition peut-elle nous tromper à ce point? C'est que quand nous cherchons à imaginer une courbe, nous ne pouvons pas nous la représenter sans épaisseur; de même, quand nous nous représentons une droite, nous la voyons sous la forme d'une bande rectiligne d'une certaine largeur. Nous savons bien que ces lignes n'ont pas d'épaisseur; nous nous efforçons de les imaginer de plus en plus minces et de nous rapprocher ainsi de la limite; nous y parvenons dans une certaine mesure, mais nous n'atteindrons jamais cette limite.

Et alors il est clair que nous pourrons toujours nous représenter ces deux rubans étroits, l'un rectiligne, l'autre curviligne, dans une position telle qu'ils empiètent légèrement l'un sur l'autre sans se traverser.

Nous serons ainsi amenés, à moins d'être avertis par une analyse rigoureuse, à conclure, qu'une courbe a toujours une tangente ».

Argumentum quod examinamus, in ultima alinea exprimitur.

Sumamus exemplum simplicissimum, classicum, talis functionis quae est ubique continua sed in uno puncto caret derivata. Ideo, aiunt, curva quae huic functioni correspondet, esset quidem ubique continua, sed in uno puncto careret tangente. Et ideo contradiceret intuitioni. Ecce functio: $y = x \sin \frac{l}{x}$. Est functio periodica, sicut functio $y = \sin x$, sed eius « sinuositates », si accedimus ad originem coordinatarum ($x = O$, $y = O$), *primo* habent semper minorem amplitudinem (distantiam maximorum et minimorum ab axi abscissarum), quia functio sinus multiplicatur per x et x semper magis accedit ad zero; et *secundo* « sinuositates » semper magis ad invicem quasi comprimuntur, quia singuli periodi correspondent variationi quae est aequalis 2π et haec variatio iam attingitur per eo minorem variationem in x quo ipse valor x iam est minor et ideo $\frac{l}{x}$ est maior. Versus originem « sinuositates » in infinitum comprimuntur. Sed haec functio per se sensum non habet, si $x = 0$; quia divisio per zero sensum non habet; ideo additur, et id rationabiliter fit, aequationi supra scriptae hoc systema valorum: si $x = 0$, $y = 0$.

Functio autem ita definita est ubique continua: et tamen in ipsa origine non habet derivatam. Unde concludunt: ergo curva geometrica quae per illas aequationes definitur, in origine non habet tangentem, quamvis et ibi sit continua.

Interrogamus autem: num revera geometrice « existit » haec curva? Conemur eum construere per motum compositum puncti supra descriptum. Ponamus igitur $x = a - t$, tunc habemus: $y = (a - t) \sin \frac{l}{a - t}$. Eo momento quo $t = 0$, linea mobilis est a parte dextra originis in distantia a: momento quo $t = a$ erit in origine et punctum curvae erit $x = 0$ et $y = 0$. Potestne attingi hoc punctum *ita ut motus puncti in linea mobili ordinatarum* revera realizetur secundum legem $y = (a - t) \sin \frac{l}{a - t}$? Ecce, ut punctum originis attingi posset, valor huius functionis actualiter-infinities deberet (periodice) maximum et minimum attingere, punctum mobile in linea mobili deberet in ea actualiter-infinities ascendere et descendere. Sed — etiamsi quis tenet infinitum actuale non repugnare — tamen infinitum ex definitione *non potest pertransiri*. Inde: motus puncti in linea mobili ordinatarum, si haec originem attingere debet, est impossibilis; ergo haec curva geometrice « exsistere » secundum hanc methodum non constat. Si linea nostra pergit tantum usque ad distantiam, etiam minimam, ab origine coordinatarum, nihil impossibile adest; inde: quaevis pars curvae existit, dummodo ne cogitetur perducta usque ad originem; sed in talibus partibus ubique habet tangentem.

Utrum haec functio analytice sensum habet, hic non examinatur; sed illi aequationi nulla correspondet curva totalis geometrica, ex motu orta. Et methodum aliam construendi curvam non indicant. Ergo id quod ex intuitione sequitur: omnis curva in quolibet puncto in quo est continua, habet tangentem, non refutatur per hoc exemplum; immo hucusque, potius confirmatur.

Postea, primo a Weierstrasz, constructae sunt functiones, quae etiam mirabiliores sunt: hae sunt ubique continuae et nullibi habent derivatam; eis dicuntur correspondere curvae quae sunt ubique continuae et tamen nullibi habent tangentem. Eodem modo ac supra solvenda erit difficultas: illae curvae (kritzelige Kurven) ubique sunt « infinite sinuosae » ita ut ex eodem capite geometrice non existant. Construuntur curvae « approximativae » sed hae sunt normales i. e. habent tangentes.

De his curvis vide ingeniose exposita apud F. Klein *Anwendung der Differential- und Integralrechnung* (neuer Abdruck 1907) pag 39 sq., 51 sq., 78 sq., 83-102. De his etiam agit O. Becker in libro *Beiträge zur phaenomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen* (in *Jahrbuch für Philos. und phaenomenolische Forschung* VI 1923) pag. 90-93. Eius solutio difficultatis non est omni ex parte clara, *forte* quoad rem est eadem ac nostra. Curva a Weierstrasz constructa describitur a Brunschwicg *Les étapes de la philosophie mathématique* pag. 338.

8. — De geometria ut scientia constructiva.

In superioribus exempla simplicissima « constructionis » geometricae videbamus, quae simul existentiam mathematicam horum objectorum manifestant. Construebantur per divisionem partes extensae totius extensi; eo ipso construebantur superficies, lineae, puncta, ut limites exacti partium. Ita quoque inveniebantur quaedam principia, quae tanquam « axiomata ordinis » enuntiari solent. Nam divisibilitas in infinitum, ut supra inventa est, aequivalet principiis: « inter duo puncta in linea *semper* adest tertium distinctum a prioribus »; unde sequitur inter duo puncta in infinitum alia inveniri; i. e. ibi adsunt in potentia, construi sive actuari possunt et hoc sensu absque dubio « mathematice existunt ».

Haec notio « constructionis » a Kantio tanquam per excellentiam mathematica describitur; per possibilitatem constructionis obiectorum suorum, disciplina mathematica differt a ceteris v. g. a metaphysica. Apud multos alios haec proprietas scientiae mathematicae valde urgetur, immo non raro exaggeratur, ita ut in errorem ducat. Nimium enim tribuitur *activitati* mentis humanae; interdum omnia ei in hac materia adscribuntur et sermo de « creatione » horum obiectorum per mentem humanam; et ita quidem ut haec notio creationis (utique pro obiectis idealibus) stricte sumenda sit; immo loquuntur de creatione libera. Patet in tali sententia oriri problema de valore et applicabilitate talis creationis et eam questionem ita fieri insolubilem.

Hic modus interpretandi constructionem obiectorum in scientia mathematica est sine dubio erroneus; id quod ex superioribus patet. Nam in casibus simplicibus, quos hucusque examinabamus, id iam manifestum est. Construimus utique mente nostra; sed construimus ex materia praeiacente, ex ente extenso ut est extensum. Quod maioris momenti est: *detegimus* ens extensum esse materiam aptam, ex qua construamus; detegimus « propria » stricte dicta materiae, quae talem constructionem pati potest; detegimus primo, si ita loqui fas est, « constructibilitatem » tanquam passionem propriam huius subiecti; detegimus id quod *fieri* potest in et ex hac materia sive potentia. Inde patet, quam apte extensum ab Aristotele et scholasticis vocetur: materia intelligibilis.

Et in hoc inveniendo, simul intelligimus *dependentiam* nostram ab hac materia et a datis sensitivis; haec omnia non decidimus, non causamus, haec detegimus. *Quod* ibi diversae figurae construi possint, invenimus, quia intelligimus hanc aptitudinem in ente extenso; *quae* construi possint: multitudo per divisibilitatem, limites exacti partium, puncta sita in lineis et quidem in infinitum, haec omnia detegimus intuitu intellectus aspicientis in datis experimentalibus, in phantasmate. In utraque parte non *imponimus* sed *accipimus,* non agimus nisi abstrahendo simul et intuendo. Activitas nostra construens ligatur per materiam ex qua fit constructio, per id quod intuitus intellectus in aspiciendo phantasmate *detegit.* Id invenitur in hisce casibus simplicibus, id alibi quoque attendi debet, et operae pretium est ut id attente consideremus. Pro activitate nostra verificatur id quod supra a S. Thoma audiebamus: data sensitiva sunt non causa totalis sed materia causae. Et ita nexus cum extenso reali ne per momentum quidem solvitur.

PETRUS HOENEN S. J.

La définition chez Aristote

L'embarras d'Aristote au sujet des méthodes de la définition, ses hésitations sur la nature même et la place de la définition dans la science ont plus d'une fois été relevées [1]. Aristote d'ailleurs ne le dissimule pas, soit dans les *Analytiques,* lorsqu'il traite des méthodes de définition, et qu'il essaie de préciser les rapports de la définition avec la démonstration, soit dans les difficiles chapitres du livre Z des *Métaphysiques,* où il étudie, de façon plus poussée que partout ailleurs, la nature de la définition, soit enfin dans le préambule bien connu du traité *de l'Ame,* où il avoue les difficultés d'une méthode pour définir [2].

[1] Citons par exemple O. HAMELIN, *Le système d'Aristote,* M. S. ROLAND-GOSSELIN, *Les méthodes de définition d'Aristote,* Revues des Sciences philosophiques et théologiques, 1912, A. J. FESTUGIÈRE, *Les méthodes de definition de l'âme,* Ibid., 1931. Cf. encore E. ZELLIER, *Philosophie der Griechen,* II, 2, 251-256. Nous nous sommes beaucoup inspirés aussi, dans cette note, de l'article de M. ROBIN, *La conception aristotélicienne de la causalité,* dans Archiv für Geschichte der Philosophie, 1909-10, et de l'article du P. FESTUGIÈRE, *Antisthénica,* dans Revue des Sc. Phil. et Théol., 1932. Cf. enfin KÜHN, *De notionis definitione quae Aristoteles constituere,* (Halle, 1844), RASSOW, *Aristoteles de notione definitionis doctrina.*

[2] Les sources principales, pour une étude de la définition chez Aristote, sont: Les *Topiques* (surtout livre VI, spécialement consacré à la définition, et aussi livre I passim) Les *Seconds Analytiques* (cc. 3 à 8 sur la façon de parvenir à la définition et ses rapports avec la démonstration, c. 13 sur les méthodes de définition), les livres Z et H de la *métaphysique,* le livre I, c. 1, du *traité de l'Ame,* et quelques passages méthodologiques des *Physiques* (livre I, c. 1, livre IV, c. 4). Ce sont là les sources principales: il faut consulter aussi, comme toujours lorsqu'on s'occupe de la méthode d'Aristote, l'admirable livre I du traité sur les *Parties des Animaux* et généralement, la pratique d'Aristote dans ses traités de science.