"Gregorianum"

COMMENTARII

DE RE THEOLOGICA ET PHILOSOPHICA

EDITI A PROFESSORIBUS

PONTIFICIAE UNIVERSITATIS GREGORIANAE

Anno XIX - 1938

Vol. XIX

ROMAE

IN PONTIFICIA UNIVERSITATE GREGORIANA

PIAZZA DELLA PILOTTA

De philosophia scholastica cognitionis geometricae[1]

Praelectiones nostrae quoad materiam quam tradent, considerari possunt tanquam evolutio librorum Aristotelis qui *Analytica Posteriora* inscribuntur.

In hoc tractatu philosophus agit de scientia stricte dicta quae ex demonstratione apodictica habetur. Libri *Priorum Analyticorum* considerant syllogismum secundum *formam* tantum, qui formari potest ex propositionibus, quae nec certae sunt nec verae. *Analytica Posteriora* autem tanquam objectum habent *demonstrationem* per syllogismum, in quo propositiones praemissae sunt verae, certae, necessariae, qui scientiam stricte dictam generat. Consideratur igitur etiam *materia* syllogismi.

S. Thomas utriusque tractatus indolem ita describit (*Anal. Post.* I lect. 1 n. 6):

> « Pars autem Logicae, quae primo deservit processui [i. e. « rationis processus necessitatem inducens »] pars *Iudicativa* dicitur, eo quod iudicium est cum certitudine scientiae. Et quia iudicium certum de effectibus haberi non potest nisi resolvendo in prima principia, ideo pars haec *Analytica* vocatur, idest resolutoria. Certitudo autem iudicii, quae per resolutionem habetur, est, vel ex ipsa *forma* syllogismi tantum, et ad hoc ordinatur liber *Priorum Analyticorum,* qui est de syllogismo simpliciter; vel cum hoc ex *materia,* quia sumuntur propositiones per se et necessariae, et ad hoc ordinatur liber *Posteriorum Analyticorum,* qui est de syllogismo demonstrativo ».

Aristoteles in sua investigatione probat, in demonstratione — in scientia igitur prout opponitur intellectui principiorum — non posse fieri resolutionem, in quaerendis praemissis conclu-

[1] Hic articulus refert prolusionem in praelectiones quae de ipsa hac materia: philosophia scholastica cognitionis geometricae, agunt.

sionum, in infinitum, nec legitimam esse demonstrationem stricte circularem; unde in analysi perveniendum est ad quasdam propositiones primas, principia prima, axiomata, postulata, « hypotheses ». Haec de propositionibus, ut sunt elementa syllogismorum.

Simile quid dicendum est de notionibus, quae sunt elementa propositionum: non omnes definiri possunt ex notioribus; perveniendum est et hic ad primas.

Tali igitur modo Aristoteles examinat *structuram* generalem scientiarum, quae constat in connexionibus quae inveniuntur inter notiones et principia prima et notiones atque propositiones (veritates), inde ope syllogismi et definitionis derivatas. Structuram hanc non eodem modo examinat quo ipsa scientia specialis (e. g. geometria) id facit scil. ad suum proprium systema (geometricum) constituendum; objectum *Analyticorum* non est objectum scientiae specialis; eius obiectum est ipsa haec scientia eiusque origo eiusque structura. *Analytica* igitur considerant ipsas operationes mentis humanae; non utique sub respectu psychologico, ut sunt actus mentis humanae, sed sub respectu modorum quibus hi actus obiecta sua attingant. *Analytica* igitur sunt *theoria cognitionis*; etiam in hac sua prima parte quae structuram generalem scientiarum examinat.

Sed et alterum munus habent, per quod non minus theoriam cognitionis constituunt. In hac enim analysi scientiae pervenimus ad principia prima quae, si conclusiones debent esse apodicticae, et ipsa certa et necessaria sint oportet. Unde processus « logicae judicativae » per se ducit ad problema: unde oritur in ipsa mente humana cognitio certa principiorum, unde habetur cognitio certa eorum necessitatis. Et haec est altera pars inquisitionis *Analyticorum Posteriorum.*

Unde duplex problema in his libris consideratur: 1° problema structurae scientiae, quae oritur ex connexionibus inter principia et ea quae inde derivantur, 2° problema principiorum primorum.

Clarum esse videtur haec omnia non in abstracto considerari i. e. ita ut nulla scientia *specialis* examinetur et quidem id praesertim valere in secundo problemate, quippe quod in primis *materiam* propositionum considerandam habeat, « quia sumuntur propositiones per se et necessariae ».

Unde Aristoteles in his inquisitionibus fere semper ante oculos habet tanquam typum scientiae: geometriam; tum ubi in genere de scientia demonstrativa agit, tum, ut per se patet, in permultis casibus in quibus exempla ex geometria desumit. S. Thomas id iam in initio sui commentarii animadvertit; ait (*Anal. Post.* I lect, 1 n. 10):

« Manifestat [Aristoteles] propositionem praemissam per inductionem. Et primo in demonstrativis in quibus acquiritur scientia. In his autem principaliores sunt mathematicae scientiae, propter certissimum modum demonstrationis ».

Ratio est manifesta. Tempore Aristotelis geometria erat unica scientia demonstrativa quae corpus doctrinae systematicum constituebat. Quarta saeculi parte post mortem philosophi vix elapsa, Euclides sua scripsit *Elementa* quae dein per viginti fere saecula a genere humano tanquam liber manualis, fere perfectus, adhibebatur. Sed ea quae ibi proponuntur iam tempore Aristotelis inventa et quodammodo systematice redacta erant; ultimae et maximae perfectiones inventae erant in schola Platonis, praesertim ab Eudoxo et Theaeteto. Mirum non est, Aristotelem in examinanda natura scientiae apodicticae semper geometriam ante oculos habere.

Ipsi ergo geometrae, in constitutione suae scientiae, resolutionem usque ad prima principia, quae iam non demonstrabant, faciebant. Haec principia, termini resolutionis geometrarum, in schola Platonis considerabantur ut ὑποθέσεις (*Rep.* VI 510 c) quae a geometris simpliciter admittebantur; nam illi « his positis, tanquam cuilibet manifestis, rationem de his nullam exigendam putant ». Rationem autem horum exigebant et inquirebant philosophi; et apud Platonem erat praecise munus « methodi dialecticae » hanc inquisitionem instituere; et ita « dialectica » ἀναιρεῖ (*Rep.* VII 532 c) has hypotheses.

Haec doctrina magis evoluta, ut videtur, apud Aristotelem redit. Distinguit (*Anal. Post.* I cap. 2) inter propositiones, quae sunt principia scientiarum, illas quae sunt ἀξιώματα (communes animi conceptiones, dignitates) ab eis quae sunt sive ὑποθέσεις (suppositiones) sive αἰτήματα (petitiones, postulata). Differentia brevi ita describi potest: ἀξίωμα est cuilibet evidens; non ita aliae illae propositiones. Principium scientiae specialis, si cum opinione discentis congruit, erit *suppositio*, si non, erit *postulatum* [2]. Etiam Plato iam dixerat de ὁμολογία quae est inter docentem et discentem (*Rep.* VII 533 c). Sed omnia haec principia a geometra accipienda sunt ab alia scientia, altiori, sive in ea probantur per demonstrationem stricte dictam, sive per considerationem terminorum. Haec alia scientia, quae loco dialecticae platonicae assumitur et a qua scientia specialis talia principia accipit, iuxta S. Thomam est sive metaphysica (*Anal. Post.* I lect. 5 n. 7; lect. 17 n. 4) sive « naturalis » (ibid. lect. 5 n. 7); sed semper est philosophia.

Clarum est, in philosophia peripatetica munus *philosophi* esse, determinare de primis principiis geometriae, idque clarius etiam erit ex praelectionibus sequentibus; sive id munus metaphysicae tribuas sive philosophiae naturali sive parti philosophiae ab his distinctae, quam theoriam cognitionis vocare poteris.

Resolutio propositionum geometricarum ducit igitur ad quasdam primas propositiones et, in ipsa hac resolutione facienda, omnia fere ipsis mathematicis relinquenda erunt; tantum generalia, quae structuram, ut dicebamus, scientiae generalem respiciunt, philosopho etiam consideranda erunt; nam haec sine ullo dubio ad epistemologum pertinent. Sed in examinando valore principiorum principale munus nobis philosophis incumbit. Id exequi possumus ob duplicem finem. Prior est hic, ut revera omnia fundamenta, ut aiunt, scientiae geometricae completae iustificari probentur, ita ut revera pateat integram scientiam geometricam super haec fundamenta tuto construi posse; in hanc plenitudinem in nostris praelectionibus non tendemus, quamquam principales quaestiones tractabimus.

[2] Si quis putaret Aristotelem, ubi de postulatis loquitur, cogitasse de propositione, quae est famosum postulatum V Euclidis vel ei similis ei non contradiceremus; quamquam id probare nullo modo possumus.

Sed est et alter finis huius inquisitionis philosophicae: inveniemus conclusiones (et forte methodos) quae valorem magnum habebunt pro theoria cognitionis *generali*. Unum nunc afferimus, cetera in decursu praelectionum visuri. Haec theoria sane construi non potest quin iudicium mentis humanae examinetur, relate ad suum sensum, suam originem, suum valorem. Ut autem ipsum iudicium diiudicemus non sufficit, ut definitionem quandam generalem iudicii praemittamus et eam resolvamus; sed revera quaedam iudicia determinata elicienda sunt — oriri ergo debent in mente nostra — et haec iudicia quoad originem et valorem considerentur oportet. Sicut ipsa haec iudicia necessaria et universalia in casibus concretis intuitu mentis inspicimus — exempla abundabunt in decursu expositionis — ita theoria universalis ipsius iudicii elucescit ex aptis iudiciis determinatis, quae tunc iam non solum considerantur ut iudicia talis scientiae specialis sed ut specimina ipsius iudicii ut talis, quae naturam huius operationis mentis humanae ipsi menti revelant. Talia specimina optima praebebit examen principiorum mathematicorum, siquidem verum est id quod S. Thomam audiebamus dicentem hanc scientiam habere modum certissimum *demonstrationis*. Nam demonstratio non tantum complectitur rectitudinem formae, sed etiam et praesertim necessitatem cognitam materiae, inde necessitatem principiorum. Unde philosophum qui in theoriam cognitionis incumbit haec principia negligere nefas est.

* * *

Haec omnia nostro tempore magis quam antea urgenda sunt. Ad id intelligendum historiam problematis cognitionis mathematicae brevissime hic enarrare iuvabit.

Usque ad medium fere saeculum praecedens communis opinio tum philosophorum tum mathematicorum — tum humani generis integri — haec erat: cognitionem mathematicam ultimatim hauriri ex datis sensibilitatis, sive ex sensibus externis sive ex imaginatione. Id intendit S. Thomas ubi ait (*In Boeth. de Trinit.* q. 6 a. 2): « In mathematicis enim oportet cognitionem secundum iudicium terminari ad imaginationem non ad

sensum ». (Cfr. *In Eth. Nic.* I lect. 11 ed. Parm. T. IV pag. 24 b). In explicatione ulteriori utique erat diversitas sententiarum. Pro Platone, propter imperfectionem sensibilitatis, data sensuum non erant nisi occasio vel praeparatio requisita ad hoc ut mens sibi reminisceret ea quae antea intuitu mentali viderat (Vide *Meno* 82b-85b et alibi). Et ipsae formae mathematicae, ut videtur, nec poterant in sensibilibus nonnisi imperfecte participari. Aristoteles tenebat « mathematica » (τά ἐξ ἀφαιρέσεως) haberi per abstractionem a datis sensitivis, tum quoad notiones tum quoad prima principia, quae et ipsa per inductionem quandam cognosci dicuntur [3]. Non utique ita, ut iudicium mentis tantum redderet ea quae sensus referunt, sed, sicut in abstractione idearum ex datis sensitivis habetur operatio intellectus agentis, ita quoque in origine eorum iudiciorum, quae sunt principia prima, habetur similis operatio, quae sensum transcendit et naturam attingit; in datis imaginationis ipsa mens vero intuitu mentali naturas inspicit (*Anal. Post.* I 12, 77 b 30): ταῦτα (i. e. mathematica) δ᾿ἐστὶν οἷον ὁρᾶν τῇ νοήσει. Cfr. *De An.* III 8, 432 a 5-9 (S. Thomas lect. 13; Pirotta n. 791), ibid. III 7, 431 a 14-16; 431 b 2 (St. Th. lect. 12; Pir. n. 770-772, n. 777).

A Kantio ad explicationem necessitatis cognitionis geometricae fingitur forma subiectiva sensibilitatis externae. De hac sententia postea plura dicemus, nunc sufficiat notasse, etiam in hac sententia admitti intuitum (non utique intellectivum) in phantasmate, qui originem cognitionis geometricae explicare debet.

Hae igitur scholae conveniunt in admittenda necessitate et exactitudine cognitionis mathematicae. In saeculo praecedente empirismus, praesertim uti exponitur a Stuart Mill, originem cognitionis mathematicae ex datis sensuum omnino admittit, sed ideo eam omnino aequiparat cognitioni physicae, ita ut et

[3] De his postea plura. Cfr. interim Geyser, *Die Erkenntnistheorie des Aristoteles*, cap. VI et XII; O. Hamelin, *Le Système d'Aristote*, pag. 258 sq., 234 sq.; W. D. Ross, *Aristotle*, pag. 38-41, 54, 267; insuper ea quae scripsimus in articulo *De origine primorum principiorum scientiae* in *Gregorianum* XIV (1933) pag. 153-184.

necessitatem apodicticam et exactitudinem omnimodam, quas genus humanum cognitioni mathematicae semper tribuerat, denegaret.

Hanc theoriam empiristicam postea brevi negotio tanquam ineptam expedire poterimus; bene tamen duo problema indicat, quorum solutionem epistemologus invenire debebit, si cognitioni mathematicae necessitatem et exactitudinem vindicare voluerit. Id hodie valde urget, non propter theoriam illam empiristicam, sed propter modernas theorias, quae ex his difficultatibus originem habent. Hae enim theoriae theorias classicas ex integro rejiciunt et eo ipso convictionem saecularem, quam genus humanum de valore scientiae geometricae habebat, penitus evertunt. Urget igitur sine ullo dubio officium examinandi haec problemata.

* * *

Ecce duo problemata. Prius est hoc: Data sensibilitatis, i. e. ea quae a sensibus cognoscuntur et in quantum ita tantum cognoscuntur, sunt de se *contingentia*; sed iudicia mathematicae sese praesentant ut absolute *necessaria,* tum in arithmetica tum in geometria. Si ex his datis sensitivis oriri debent, unde provenit illa necessitas?

Hoc problema invenitur, uti dictum est, tum in geometria tum in arithmetica. Sed sola geometria alterum problema secum fert: data sensuum relate ad continuum intuitionis imaginativae, et relate ad perceptiones sensuum externorum — etiam adhibitis instrumentis perfectis —, non sunt *exacta*. Sensus non percipiunt puncta sine extensione, sed tantum parva corpuscula, quae non sunt puncta; similiter nec lineas percipere possunt sed tantum corpora longa, quorum latitudo non est nulla. Sensus non possunt distinguere inter lineam rectam et aliam, quae est paululum tantum incurvata; non possunt decidere utrum tres lineae fere vel omnino exacte sint concurrentes; nec imaginatio haec omnia distinguere potest. Pro omni cognitione sensitiva adest « limen exactitudinis » quod sensus pertransire non possunt. Et tamen geometria de talibus iudicia absolute exacta proferre se contendit. Tres lineas medianas in triangulo omnino

— « infinite » — exacte concurrere docet. Unde haec exactitudo? In arithmetica hoc problema non adest, sensus perfecte percipere et decidere possunt utrum tria vel quinque obiecta adsint et quid ex harum multitudinum additione resultet; ibi *exactitudo* in datis sensitivis non deest.

Non omnes alterum hoc problema bene describunt; Kant videtur omnino non ad id attendisse; in problematica moderna primas habet partes, quamquam, uti videbimus, non omnes in omni problemate id clare exprimere potuerunt.

Modernae igitur theoriae ex difficultatibus alterius praesertim problematis proveniunt; de problemate necessitatis — excepto unico casu de quo postea — parum loquuntur; videtur id tanquam solutum considerari ex eo quod mathematicam « puram » describunt ut « creationem » puram mentis humanae; in qua opinione dein etiam problema exactitudinis videtur disparere. Sed tunc surgunt, ut clarum est, aliae quaestiones: quaestio de sensu reali talis doctrinae, a mente humanae creatae, quaestio de eius applicabilitate ad mundum realem, ad quem tamen applicant hanc doctrinam. Nec mirum est in hac quaestione interdum redire crudam sententiam empirismi. Ita Einstein:

> « Quomodo fieri potest ut mathematica, quae tamen est producta a mente humana independenter ab omni experientia, tam perfecte applicari possit ad realitatem? Potestne igitur intellectus humanus sine experientia per puram cogitationem suam attingere proprietates rerum realium?
>
> Ad hanc interrogationem mea sententia breviter respondendum est: in quantum theses mathematicae referuntur ad realitatem, non sunt certae; in quantum certae sunt, non respiciunt realitatem » [4].

Tales sententias, etiamsi abstrahas ab exaggeratione pure rhetorica, exigere novum examen fundamentorum mathemati-

[4] A. Einstein, *Geometrie und Erfahrung.* Berlin 1921. « Wie ist es möglich, dasz die Mathematik, die doch ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt des menschlichen Denkens ist, auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich paszt? Kann dann die menschliche Vernunft ohne Erfahrung durch bloszes Denken Eigenschaften der wirklichen Dinge ergründen?

Hierauf ist nach meiner Ansicht kurz zu antworten: insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit ».

cae, clarum est. Praesupponunt longiorem evolutionem doctrinarum, quae intuitioni imaginativae continui, ex qua tamen oritur cognitio geometrica, fidem plus minusve denegant, immo eam ut in errores ducentem describunt.

Haec evolutio moderna secundum duplicem praesertim viam progressa est; et utraque respicit problema transitus ex inexactitudine sensationis ad exactitudinem intellectus mathematici. Prior via ducit ad arithmetizationem continui, quae dicitur, altera ad doctrinas, quae ex critica postulati V Euclidis ortum habent. Videamus breviter hanc evolutionem [5].

A. De arithmetizatione continui. Graeci numeros deducebant ex consideratione continui intuitivi. Aristoteles, uti notissimum est, distinguebat quantitatem continuam et quantitatem discretam, quae ex divisione prioris ortum habet. Multitudo oritur ex divisione, multitudo mensurata per unum est numerus, numerus integer, numerus naturalis.

Quomodo ex eadem divisione notio numeri fractionalis orta sit, hic explicatione non indiget. Graeci, ut videtur, non volebant considerare fractiones ut numeros; ubi Aegyptii (et moderni) fractionem considerant et quidem ut numerum, Graeci admittebant proportiones inter continua, lineas, quae sese habent ut numeri; ita: si lineae diversae longitudinis per multiplicationem ope numerorum diversorum ad aequalitatem evehi possunt, tunc earum proportio est inversa proportioni horum numerorum.

Sed etiam iam detexerunt dari lineas (v. g. latus et diagonalem quadrati) quae nullam proportionem numeralem admittebant, quae erant incommensurabiles, irrationales. Difficultates quae ex his proportionibus irrationalibus (sed realibus) oriebantur, Eudoxus per suam theoriam proportionum (quae in libro V *Elementorum* Euclidis describitur) splendide solvit.

Moderniores, certe inde a Cartesio, has proportiones omnes ut numeros considerabant et, sicut Graeci habebant « continuum proportionum » quod est corpus omnium proportionum

[5] Vide *Cosmologiam* nostram; not. III, pag. 426-435 et VI pag. 447-458.

in continuo, ita moderni habent continuum numerorum, corpus « numerorum realium », quod continet non tantum integros, sed etiam numeros fractionales, etiam numeros irrationales (tum algebraicos tum transcendentes). Ope horum numerorum poterat constitui « analysis » moderna, quae per *calculum* infinitesimalem continuum, etiam mutationes continuas, *calculo* subiicere potest. Sed hi numeri, haec analysis ex continuo intuitivo deducebantur; hi numeri non sunt nisi aliud *nomen* pro proportionibus Graecorum.

In hoc puncto in decursu saeculi praecedentis difficultates movebantur; continuum intuitivum, propter defectum exactitudinis perceptionis sensitivae, non videbatur esse medium aptum ex quo corpus numerorum realium deduceretur; unde hoc alio modo, ex pura intuitione arithmetica seriei numerorum integrorum (1, 2, 3 . . . in infinitum), quae defectu inexactitudinis non laborat, deducere conati sunt.

Pauci exacte describunt hanc difficultatem; ecce duo nomina celeberrima virorum doctorum, qui omni claritate loquuntur.

F. Klein in libro *Anwendung der Differential- und Integralrechnung. Eine Revision der Prinzipien* (qui, ut altera pars inscriptionis indicat, totus est de hoc problemate) ex professo hanc difficultatem tractat. Bene explicat, in mensura ope perceptionis sensuum (et etiam in imaginatione) dari *limen exactitudinis* ultra quod percipere non possumus:

> « In omnibus hisce regionibus practicis datur valor liminaris exactitudinis » [6].

In definitione autem arithmetica numeri realis (v. g. ope fractionis decimalis) non datur tale limen:

> « In regione ideali Arithmeticae non datur valor liminaris finitus, sicut in regione empirica, sed exactitudo, qua numeri definiuntur vel saltem ut definiti considerantur, est illimitata » [7].

[6] Op. Cit. in 2ª ed. (Leipzig 1907) pag. 7. « In allen diesen praktischen Gebieten gibt es einen Schwellenwert der Genauigkeit ».

[7] « Im ideellen Gebiet der Arithmetik gibt es keinen endlichen Schwellenwert, wie im empirischen Gebiet, sondern die Genauigkeit, mit der die

Difficultatem quamdam, quam habemus, omittimus sicut etiam modum quo dein pergit in constructione analysis (et geometriae abstractae « precisae », « Praezisionsmathemathik »).

Audiamus etiam verba H. Poincaré:

« Intuitio [continui] non potest nobis dare exactitudinem, ne certitudinem quidem; id semper magis animadvertebatur »[8].

« Habemus igitur diversa genera intuitionis; primo appellatio ad sensus et ad imaginationem; dein, generalisatio ope inductionis... denique habemus intuitionem numeri puri... Primae duae non possunt nobis dare certitudinem; supra id demonstravi exemplis; sed quis serio dubitaret de tertia, quis dubitaret de Arithmetica?

Atqui in analysi hodierna, si quis vult sese adstringere ad rigorem, non invenitur nisi syllogismus et appellatio ad hanc intuitionem numeri puri, quae sola nos decipere non potest. Dici potest exactitudinem absolutam hodie attingi »[9].

Analysis ergo, quia pure arithmetice inde a serie numerorum integrorum construitur, iam non dependet, ut antea, ab intuitione continui, sed vice versa adhibetur ad construendam geometriam quandam abstractam. Et hoc ideo, ut audiebamus, quia intuitioni continui, propter inexactitudinem datorum sensitivorum, fidem denegant. Immo putant sese habere quaedam exempla (postea ea examinabimus) quae ex analysi deducuntur et intuitioni imaginativae positive contradicere dicuntur.

Haec si vera sunt, constituunt problema gravissimum: unde fieri potest ut menti humanae per tot saecula tam firmiter

Zahlen definiert werden oder doch als definiert angesehen werden, ist unbegrenzt » (Op. cit. pag. 11).

[8] In opere *La valeur de la science* pag. 17. « L'intuition ne peut nous donner la rigueur, ni même la certitude, on s'en est aperçu de plus en plus ».

[9] Nous avons donc plusieurs sortes d'intuitions; d'abord l'appel aux sens et à l'imagination; ensuite, la généralisation par induction... nous avons enfin l'intuition du nombre pur... Les deux premières ne peuvent nous donner la certitude, je l'ai prouvé plus haut par des exemples; mais qui doutera sérieusement de la troisième, qui doutera de l'Arithmétique?

Or, dans l'Analyse d'aujourd'hui, quand on veut se donner la peine d'être rigoureux, il n'y a plus que des syllogismes ou des appels à cette intuition du nombre pur, la seule qui ne puisse nous tromper. On peut dire qu'aujourd'hui la rigueur absolue est atteinte » (pag. 22 sq.).

persuasum fuerit de valore exacto et certitudine maxima geometriae, ex tali intuitione deductae? Non desunt qui ideo affirment hanc methodum classicam construendi geometriam, non obstante maximo ingenio multorum, qui eam adhibebant, nonnisi somnium, « eine Utopie », esse. Ita cl. mathematicus « realista » E. Study, in libro cui titulus *Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume* (Brauschweig 1914 pag. 131) ait:

« Decisiva ad diiudicandum statum rerum nobis videtur esse circumstantia, quod geometriam ab analysi revera independentem, *quam ideale antiquum proprie postularet,* somnium esse patet »[10].

Sed gravior etiam fit difficultas, si examen ulterius docet geometriam hanc classicam nec ex analysi et dependenter ab illa construi posse. Nam in tali casu mathematici maximi ingenii usque ad medium saeculum praecedens non tantum in methodo, sed etiam in iis quae se invenisse putabant, errassent.

Et revera, in casu quem supponimus, res ita sese habere videtur. Utique, si agitur de applicatione approximativa (Approximationsmathematik iuxta F. Klein) non est magna difficultas; nam haec tantum agit de rebus extensis experimentalibus, *prout* a sensibus ope perceptionis sensitivae inexactae cognoscuntur. Sed si agitur de proprietatibus extensionis *abstractae,* extensi ut extensi, de quibus geometria classica arguebat, haec non poterit, ut nobis videtur, deduci ex analysi, *quin in ipsa hac applicatione omnes difficultates eaedem iterum appareant.* Et ita nihil profecimus.

Si id verum est nonne debemus affirmare, intellectum humanum nec hanc extensionem perfecte cognoscere, id quod genus humanum hucusque semper credidit? Quid in specie dicendum de theoria cognitionis Aristotelicae, quae firmiter putabat, hanc scientiam ex datis sensitivis oriri?

Accedit aliud quid. Paulo post initium huius saeculi in ipsa hac superba analysi arithmetica difficultates ortae sunt, quae

[10] « Ausschlaggebend für die Beurtheilung der Sachlage scheint uns der Umstand zu sein, dass eine von der Analysis wirklich unabhängige Geometrie, *wie das antike Ideal sie eigentlich verlangen würde,* sich als eine Utopie herausgestellt hat ». Sublineatio est ipsius cl. Study.

secundum quosdam (ita Weyl, Brouwer et alii) ad veri nominis « crisin » in mathematica ducunt. Et est unus vel alter (v. g. cl. O. Hölder) qui putet difficultates solvi non posse nisi per reditum ad considerationem continui intuitivi; id quod nobis verum esse videtur. Eo magis urget munus inquirendi in modum superandi inexactitudinem datorum sensitivorum; id quod in praelectionibus facere conabimur.

B. De critica postulati V Euclidis. Altera via qua evolutio moderna philosophiae matheseos progressa est, erat critica postulati V Euclidis, sive postulati unicae parallelae. Principium quod hoc postulato exprimitur sane non est immediate evidens, non potest immediate ex datis sensitivis abstrahi; iterum propter defectum exactitudinis in his datis, ut postea suo loco videbimus. (Mirum est: permulti mathematici, qui hoc principium « minus evidens » quam alia axiomata vocant, videntur non posse indicare radicem hanc defectus evidentiae). Pertinet ergo ad illa principia, quae iuxta Aristotelem non sunt ἀξιώματα sed αἰτήματα; quae proinde in geometria ut ὑποθέσεις admittuntur sed ex alia, altiori, scientia, a philosophia explicanda et iustificanda sunt.

Iam in antiquitate, teste Proclo, difficultates relate ad hoc postulatum movebantur et, loco eius, alia proponebantur, quae tamen eodem defectu laborant. Critica saeculi praecedentis ad hanc conclusionem, saltem nunc a mathematicis generaliter admissam, ducebat: praeter geometriam classicam, Euclidicam, alia possibilis est, quae postulatum V reiicit et loco eius aliud, ei oppositum, introducit. Multa — non utique omnia — theoremata, inde deducta, contradicunt thesibus classicis; sed contradictio interna in singulis systematis geometricis deest nec in posterum inveniri poterit. Inde concludunt: per multa saecula geometria Euclidica menti humanae videbatur esse unica possibilis, necessaria; id nunc patet esse falsum; iuxta eam alia systemata adsunt, quae non minus possibilia sunt. Incidimus in problema, quod a theoria cognitionis solvendum est.

Prima facie geometriae necessitas denegari videtur; et revera sunt quidam, qui hoc sensu geometriam iam inter scien-

tias pure physicas, quae simili modo necessitate nobis perspecta carent, annumerent. Id sine ullo dubio falsum est, ut facile ostendi potest; singula systemata intrinsece sunt necessaria et ut talia a nobis cognoscuntur. Sed haec comparatio inter scientias geometricas et physicas attentione nostra digna erit.

Manet tamen aliud problema gravissimum: genus humanum integrum et omnes mathematici, etiam ii qui de postulato V non erant contenti, geometriam Euclidicam ut *unicam* necessariam agnoscebant; si est error, quomodo explicandus; si non est error, quid de severa critica moderna dicendum? Clarum est: iterum agitur de problemate gravi, quod in theoria generali cognitionis momentum habet. Nonne Aristoteles et S. Thomas, quando thesin absolute certam tanquam exemplum proponere volunt, eligunt theoremata ex geometria Euclidica?

C. De Axiomatica quae dicitur. Ex hac critica sese evolvit integra scientia, pars « logicae iudicativae », quam *Axiomaticam* vocant. Supra sermo erat de intrinseca necessitate et intrinseca immunitate a contradictione, quae singulis systematis geometricis, etiam non-Euclidicis, competit. Ut de his proprietatibus constet, revera prima principia talis scientiae debent enuntiari, singula et omnia. Hoc facto unum systema v. g. geometria Euclidica enuntiari potest ut ingens propositio conditionalis. Indicemus principia litteris A, B ... et F, dein conclusiones litteris P. Q, R ... Integra geometria nunc ita enuntiari potest: Si A et B ... et F, tunc P et Q et R et ... Haec propositio, ut vere conditionalis, enuntiat intrinsecam necessitatem. Et haec scientia erit: *hypothetico-deductiva*. Multi axiomatici volunt geometriam puram non esse nisi tale systema hypothetico-deductivum. Hypothesis fundamentalis i. e. series axiomatum A, B ... F, non amplius relate ad valorem realem propositionum examinatur; immo secundum axiomaticos extremos, ne num examinatur; immo secundum axiomaticos extremos, ne relate ad earum sensum quidem. Notissima sunt verba quibus cl. Hilbert in capite primo libri *Die Grundlagen der Geometrie* expositionem incipit:

« Cogitamus tria diversa systemata rerum: res primi systematis vocamus *puncta* easque indicamus litteris *A, B, C*,...; res secundi systematis vocamus (lineas) *rectas* easque indicamus litteris *a, b, c,...*; res tertii systematis vocamus (superficies) *planas* easque indicamus litteris α, β, γ» [11].

Igitur nec valor nec sensus importat sed tantum requirunt ut ex hypothesi praemissa, secundum puram logicam formalem per syllogismos rectos deductio fiat.

Haec positio prima facie potest videre sat Aristotelica; nam etiam iuxta philosophum, scientia stricte dicta — prout opponitur intellectui principiorum — pure respicit conclusiones logice deductas. Adesse tamen ingens discrimen suo loco videbimus.

Iamvero, si de sensu axiomatum non curatur, clarum est, de evidentia axiomatum non posse esse sermonem. Unde nec a priori certi esse possumus, ex tali systemate axiomatum nullam contradictionem secuturam esse. Unde axiomatica incumbit in inveniendas methodos ad probandum, nullam contradictionem secuturam esse.

Haec positio ducit tum ad problemata tum ad resultata pretiosa. Primum problema est idem quod semper redit, si viam naturalem secundum quam mens humana procedit (« le cheminement de la pensée) relinquimus. Mens humana putat se extensionem obiectivam optime cognoscere et de tali obiecto scientiam certissimam construi posse. Tale systema axiomaticum, non-contradictorium, non sine pluribus attingit hoc obiectum; ut applicatio fiat, videtur redire totum problema classicum de transitu ex datis sensitivis inexactis (et forte contingentibus) ad scientiam exactam ac necessariam. Geometria enim classica non *solum* per systema hypothetico-deductivum reinventa est.

Sed axiomatica etiam resultata pretiosa invenit. Ecce: ut iam dictum est, incipit a systemate « axiomatum » de quorum evidentia nihil supponit et ideo sine ullo dubio statui posset systema ex quo cito vel post longiorem deductionem contradictio sequeretur. Ut deductio tuta sit requiritur igitur ut hoc praecaveatur. Et inquisierunt atque invenerunt methodus demonstrandi, systema determinatum esse immune a contradictione etiam in conclusionibus futuris. Tales methodi, interdum ingeniosissimae absque dubio sunt evolutio pretiosa logicae.

[11] « Wir denken uns drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit *A, B, C,...*; die Dinge des zweiten Systems nennen wir *Geraden* und bezeichnen sie mit *a, b, c,...*; die Dinge des dritten Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen sie mit α, β, γ... » Op. cit. ed. 7 (1930) pag. 2.

Insuper hae methodi permittunt inquisitiones in particularitates structurae scientiae, sicut Aristoteles in *Analyticis Posterioribus* quoad structuram generalem fecit. Non omnes conclusiones exigunt ad suam deductionem integram seriem axiomatum; et determinari potuit in diversis casibus, quomodo systema axiomatum in diversas partes distingui possit, quae in diversas partes scientiae influunt. Ita structura scientiae magis distincte cognosci potest. Habemus ulteriorem evolutionem doctrinae Aristotelis. Cum hac quaestione et cum problemate non-contradictionis cohaerent methodi inquirendi in veram *independentiam* mutuam axiomatum, quae proponuntur; et hae quoque lucrum pro « logica iudicativa » afferunt.

Et integra haec methodus probandi non-contradictionem videtur ducere ad problema quod cum ontologia cohaeret, cum theoria scilicet possibilium. Tanquam possibilia describuntur: obiecta quorum notae nullam ad invicem contradictionem comportent. Potestne haec theoria applicari ad systemata quae secundum axiomaticam sunt immunia a contradictione e. g. ad geometriam non-Euclidicam? Et in genere ad problema « existentiae mathematicae » de qua etiam Aristoteles et S. Thomas theoriam, adhuc evolvendam, habent?

* * *

Ex brevi hoc conspectu concludere licet: in hac parte philosophiae magno cum dolore videmus absentiam inquisitionum scholasticorum. Sine dubio haec pars « logicae iudicativae », quae scientia ab Aristotele tam feliciter inchoata erat, praesertim post modernam criticam harum quaestionum, iterum colenda est; agitur de gravissimis problematis theoriae cognitionis, non tantum specialis sed etiam generalis, de problematis logicae et de problematis, quoad structuram scientiae, epistemologicis. Agitur quoque de complete constituendis fundamentis geometriae; sed ad hoc nos non specialiter attendemus; prima problemata exigent attentionem nostram, quia ibi praesertim de primis principiis agitur, de re pure philosophica. Non indigebimus considerationibus mathematicae altae; sufficient elementa mathematica.

Unum in fine observemus: in praelectionibus sequentibus non agetur de scientia (utique philosophica) iam *constituta* tradenda sed potius de scientia philosophica adhuc *constituenda*: de philosophia scholastica cognitionis geometricae.

PETRUS HOENEN S. J.

La nécessité de la grâce pour arriver à la foi d'après Saint Jean Chrysostome

Summarium. — Quaeritur utrum sentiat Chrysostomus internam gratiam supernaturalem necessariam esse, sive ad actum fidei, sive ad initium fidei.

1° Exponitur, § 1ª, quid apud eum vox «χάρις» significet.

2° Probatur, § 2ª, fidem donum esse gratiae Dei, hoc quidem duobus argumentis.

Primum eruitur ex eo quod Chrysostomus docet hominem nihil boni posse, saltem ad finem ultimum obtinendum, nisi superna quadam impulsione adjuvetur. Quod principium valet imprimis de actu fidei, ut pluries explicite affirmatur.

Alterum vero ducitur ex eo quod nemo venit ad fidem nisi vocatus sit a Deo. Quae quidem vocatio, cum ejusdem sit naturae ac vocatio apostolorum aut prophetarum, eadem ratione, tota bonitati Dei, qui ab aeterno nos elegit, tribuenda est. Quidnam autem proprium in actu fidei, Patri, Filio, Spiritui Sancto, pertineat, in fine ponitur.

3°, Agitur, § 3ª, de necessitate gratiae ad initium fidei. Licet enim, argumentis jam § 2ª explanatis, quaestio soluta videatur, attamen de mente Chrysostomi inquirendum est, cum saepius initia fidei et bonorum operum libertati hominis attribuat, ita ut hominis esset sua primum afferre, quibus positis, Deus et ipse quae sua sunt ad opus perficiendum praestaret.

At omnibus perpensis sic concluditur:

a) Sententiae Chrysostomi, non ut asserta theologi qui de initio fidei abstracte dissereret, sed ut verba oratoris qui fideles ignavos eloquenter hortatur, accipiendae sunt.

b) Cum non constet haec initia, quae penes hominem esse dicit, ad ordinem supernaturalem pertinere, non constat proinde ea quae sunt hominis primam gratiam stricte mereri. Probabilius autem generosi conatus infidelium ut dispositiones ad gratiam mere negativae habendi sunt.

c) Cum vero Dei vocatio omni usu libertatis nostrae prior sit, initium fidei et salutis gratiae praevenienti tribuendum est. Patet ergo Chrysostomum necessitatem gratiae ad initium fidei minime negare, quamvis, ad tuendam libertatem, actionem primae causae in liberum arbitrium, modo simpliciore, hic et illic, describat.